Matematica I

Eduardo Pascali

21 novembre 2003

Indice

Capitolo 1

I Numeri Reali

Prima di trattare i *numeri reali* è opportuna una breve introduzione per chiarire alcune esigenze rispetto alle quali si può giustificare un procedimento costruttivo dei numeri reali. Procedimento che, nel corso degli studi inferiori, si è sottaciuto, e che si potrebbe formalizzare in maniera completa e dovrebbe chiarirci cosa noi *richiediamo* al concetto di numero reale.

Supponiamo che siano noti i **numeri naturali** ($\mathbb{N}$):

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

che sia noto il significato di somma tra due numeri naturali, e quindi anche il significato di prodotto tra due numeri naturali; inoltre supponiamo di conoscere il confronto tra naturali, nonchè le proprietà della somma, del prodotto e confronto. In questo *ambiente* possiamo asserire che dati i numeri naturali n ed m ha significato considerare il numero naturale $s = n+m$; ma ha significato anche il seguente problema.

Problema 1 *Assegnati i numeri naturali s ed n, esiste un numero naturale x per cui $s = n + x$?*

È facile rendersi conto che una risposta positiva al Problema 1 non è possibile per ogni scelta di n ed s; se, per esempio, si sceglie $n = 10$ ed $s = 3$, il problema non ha soluzioni (*non é risolubile*) nell'ambiente dei numeri naturali.

La opportunità di dare una risposta comunque affermativa al Problema 1 giustifica l'introduzione di una nuova classe di numeri, **i numeri interi relativi** ($\mathbb{Z}$)

$$0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots, \pm n, \ldots$$

Questa nuova classe di numeri ammette ancora una operazione di somma, un prodotto ed un confronto verificanti proprietà formalmente analoghe alle proprietá della somma, del prodotto e del confronto tra i numeri naturali; inoltre ammette una sua parte che si comporta come una *copia* dei numeri naturali evidentemente i numeri interi relativi

$$+1, +2, +3, \ldots, +n, \ldots$$

Non avremo nessuna difficoltà ad indicare questa parte ancora con il simbolo $\mathbb{N}$. Sottolineiamo il fatto che, nell'ambiente $\mathbb{Z}$, possiamo asserire:

(1) dati comunque $s \in \mathbb{Z}$ ed $n \in \mathbb{Z}$, esiste almeno un $x \in \mathbb{Z}$ per cui $s = n + x$.

Si può agevolmente provare che un siffatto x è unico. In $\mathbb{Z}$, come abbiamo già detto, ha significato il prodotto di due suoi elementi. Cioè dati $a, b \in \mathbb{Z}$, sappiamo cosa vuol dire $ab = p$ ed ha significato il seguente problema.

Problema 2 *Assegnati $a \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$ e $p \in \mathbb{Z}$ esiste un $x \in \mathbb{Z}$ per cui si abbia $ax = p$?*

È facile rendersi conto che una risposta positiva al Problema 2 non è possibile per ogni scelta di a e p; se, per esempio, si sceglie $a = 10$ e $p = 3$, il problema non erisolubile´ nell'ambiente dei numeri interi relativi. La opportunità di dare una risposta comunque affermativa al Problema 2 giustifica l'introduzione di una nuova classe di numeri, **i numeri razionali**

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Questa nuova classe di numeri ammette ancora una operazione di somma, un prodotto ed un confronto verificanti proprietà formalmente analoghe alle proprietà della somma, del prodotto e del confronto tra i numeri interi relativi; inoltre ammette una sua parte che si comporta come una *copia* dei numeri interi relativi, evidentemente i numeri razionali con $q = 1$.

Non avremo nessuna difficoltà ad indicare questa parte ancora con il simbolo $\mathbb{Z}$. Sottolineiamo il fatto che nell'ambiente $\mathbb{Q}$ possiamo asserire:

(2) dati comunque $a \in \mathbb{Q}$ con $a \neq 0$ e $p \in \mathbb{Q}$, esiste almeno un elemento $x \in \mathbb{Q}$ per cui $ax = p$.

Si può agevolmente provare che un siffatto x è unico e che vale la proprietá (1). In conclusione, possiamo asserire che l'ambiente dei numeri razionali ci permette di risolvere, comunque assegnati a e b in $\mathbb{Q}$, le seguenti equazioni

$$a + x = b, \qquad ax = b \quad \textit{con} \quad a \neq 0.$$

I procedimenti di *costruzione* per passare dai numeri naturali ai numeri razionali secondo lo schema su esposto sono di tipo puramente algebrico. Il passaggio dall'ambiente dei numeri razionali a quello dei numeri reali è giustificato dal seguente problema.

Problema 3 *Dato un numero razionale positivo a, esiste un numero razionale positivo x per cui $x^2 = a$?*

Il passaggio dai numeri razionali $\mathbb{Q}$ ai numeri reali $\mathbb{R}$ non è più **di tipo puramente algebrico**[1].

[1]Chi é interessato ai dettagli del procedimento esposto puó consultare il libro Curzio:"Lezioni di Algebra".

1.1 Il Sistema dei Numeri Reali

I numeri reali sono un insieme $\mathbb{R}$ di elementi con le seguenti strutture:

Una addizione (cioè una applicazione che ad ogni coppia di elementi di $\mathbb{R}$, siano a e b, fa corrispondere un nuovo elemento indicato con il simbolo $a+b$) la quale verifica le seguenti proprietà

1) $a+b=b+a$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$;

2) $a+(b+c)=(a+b)+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

3) esiste un unico elemento $0 \in \mathbb{R}$ tale che $a+0=0+a=a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

4) $\forall a \in \mathbb{R}$, esiste un unico $-a \in \mathbb{R}$ tale che $a+(-a)=(-a)+a=0$;

Una moltiplicazione (ancora una applicazione che ad ogni coppia di elementi di $\mathbb{R}$, siano a e b, fa corrispondere un nuovo elemento di $\mathbb{R}$ indicato con il simbolo ab) la quale verifica le seguenti proprietà

5) $ab=ba$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$;

6) $a(bc)=(ab)c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

7) esiste un unico elemento $1 \in \mathbb{R}$ tale che $a1=1a=a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

8) $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, esiste un unico elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tale che $aa^{-1} = a^{-1}a=1$;

Un ordinamento totale , cioè una relazione $\leq$ (si legge *minore o uguale*) tra coppie di elementi di $\mathbb{R}$, che verifica le seguenti proprietà

9) $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

10) $a \leq b$ e $b \leq a$ implica $a=b$;

11) $a \leq b$ e $b \leq c$ implica $a \leq c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

12) $\forall a,b \in \mathbb{R}$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$.

Le proprietà suesposte interessano separatamente le operazioni di addizione, di prodotto ed il confronto. I rapporti tra le strutture precedenti sono stabiliti dalle seguenti proprietà;

Distributività $(+,\cdot)$

13) $a(b+c)=ab+ac$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

Compatibilità

14) $a \leq b$ implica $a+c \leq b+c$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$;

15) $a \leq b$ e $c \geq 0$ implica $ac \leq bc$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che le proprietà enunciate fino a questo punto sono di tipo algebrico. Per poter asserire di avere definito *i numeri reali* abbiamo bisogno di una ulteriore proprietà (**assioma di completezza**) della quale parleremo successivamente. In definitiva possiamo definire **Sistema dei numeri reali** ogni insieme $\mathbb{R}$ munito di una addizione, di un prodotto, di un confronto verificanti le condizioni 1)-15) ed in cui valga l'Assioma di Completezza (o una proprietà ad esso equivalente), in queste condizioni parleremo di $\mathbb{R}$ come del *campo totalmente ordinato e completo dei numeri reali*.

Da un punto di vista "operativo" osserviamo che alcune delle proprietà assunte corrispondono al "poter risolvere" alcune equazioni. Per esempio la 3) corrisponde a saper risolvere l'equazione

$$a + x = a;$$

mentre la 4) corrisponde a saper risolvere l'equazione

$$a + x = 0;$$

analogamente la 7) corrisponde alla risoluzione dell'equazione

$$ax = a,$$

e la 8) corrisponde alla risoluzione dell'equazione

$$ax = 1, \quad \text{per } a \neq 0.$$

Non è molto difficile provare che si possono ricavare, utilizzando le 1)-15), tutte le usuali regole del calcolo tra i numeri reali, e, in generale, le regole del calcolo letterale.

Diamo di seguito alcune proprietà facilmente deducibili dalle 1)-15);

- $\forall a \in \mathbb{R}$, $a0 = 0$;
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $-(-a) = a$;
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(-a) + (-b) = -(a + b)$;
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(-a)b = -ab$;
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(-a)(-b) = ab$;
- se $ab = 0$, allora $a = 0$ oppure $b = 0$;
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ e $b \neq 0$, $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$;
- $\forall a \in R$, $a \leq 0$ implica $-a \geq 0$;
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e $c \leq 0$, implica $ac \geq bc$;
- $\forall a \in \mathbb{R}$, $aa \geq 0$ ed è $aa > 0$ se $a \neq 0$;

- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ se e solo se $a^2 < b^2$.

La dimostrazione delle precedenti regole è lasciata al lettore. Durante le dimostrazioni sarà opportuno ricordare quanto segue;

- dati $a, b \in \mathbb{R}$, si pone $a < b$ se e solo se $a \leq b$ e $a \neq b$;

- l'insieme $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ si dice insieme dei numeri positivi.

Osserviamo che la relazione "$<$" verifica la condizione 11) ma non la 9) e la 10), mentre la condizione 12) può essere così riformulata

12') $\forall a, b \in \mathbb{R}$ si ha $a < b$ oppure $a > b$ oppure $a = b$.

1.2 L'Assioma di Completezza

Ci proponiamo in questa sezione di enunciare l'assioma di completezza. Ci serviranno alcuni concetti che possono essere formalizzati anche in contesti più generali. Comunque noi supporremo di avere l'insieme $\mathbb{R}$ come campo totalmente ordinato.

La funzione valore assoluto e la funzione distanza in $\mathbb{R}$.
Ha significato definire la seguente funzione in $\mathbb{R}$ ed a valori in $\mathbb{R}$:

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Questa funzione si dice *funzione valore assoluto*. Essa verifica queste importanti proprietà:

(n_1) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

(n_2) $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$;

(n_3) $|x| = |-x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$;

(n_4) $\forall a \in \mathbb{R}^+$, $|x| \leq a$ se e solo se $-a \leq x \leq a$;

(n_5) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Altre proprietà sono le seguenti:

- $||x| - |y|| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

- $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$ per cui $a \leq b$, $a \leq x \leq b$ e $a \leq y \leq b$ si ha $|x - y| \leq b - a$;

- $|xy| = |x||y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

La dimostrazione di ognuna delle precedenti proprietà non presenta eccessive difficoltà. Le proprietà (n_i) hanno particolare importanza in quanto permettono di definire una fondamentale funzione nell'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}$. Definiamo la seguente funzione reale $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Tale funzione si dice *funzione distanza* in $\mathbb{R}$. Dalle (n_i) si deduce facilmente che d verifica quanto segue:

(d_1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

(d_2) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;

(d_3) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in R$;

(d_4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Osservazione 1 *In un contesto più generale si possono studiare insiemi X in cui sia definita una funzione reale d verificante le condizioni (d_i); la coppia (X, d) si dice spazio metrico. È bene che si faccia attenzione, durante lo svolgimento del corso, alle proposizioni o ad i fatti che dipendano esclusivamente dalle (d_i) o da loro conseguenze.*

Osservazione 2 *Altre proprietà della funzione distanza d precedentemente definita sono le seguenti*

- $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$;
- $d(xz, yz) = |z| d(x, y)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Alcuni particolari insiemi numerici. Ricordiamo che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si dice *insieme numerico*. Tra gli insiemi numerici rivestono particolare importanza i seguenti. Siano a, b elementi di $\mathbb{R}$ con $a \leq b$;

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}\,; \quad]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}\,; \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

tali insiemi si dicono rispettivamente *intervallo chiuso, aperto, semiaperto a destra, semiaperto a sinistra di estremi a e b.* Come sono gli insiemi precedenti se $a < b$ o se $b < a$? Quando non sarà necessario specificare il tipo di intervallo, si userà la notazione (a, b) e si leggerà *intervallo di estremi a e b*.

Osserviamo esplicitamente che se X è un insieme numerico, si ha che

$$X \text{ intervallo} \Rightarrow \forall a, b \in X, (a, b) \subset X.$$

Il punto $c = (a + b)/2$ si dice centro dell'intervallo di estremi a e b, mentre il numero $\delta = (b - a)/2$ si dice semidimensione (o raggio) dell'intervallo. Osserviamo che vale la seguente condizione

$$x \in (a, b) \text{ se e solo se } x \in (c - \delta, c + \delta) \text{ se e solo se } |x - c| \leq \delta.$$

Un insieme numerico X (non vuoto) si dice *limitato superiormente* se esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq k$ per ogni $x \in X$; si dice *limitato inferiormente* se esiste $h \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq h$ per ogni $x \in X$. Un elemento $k \in \mathbb{R}$ per cui risulti $x \leq k$ per ogni $x \in X$ si dice *maggiorante* per X; un elemento $h \in \mathbb{R}$ per cui risulti $x \geq h$ per ogni $x \in X$ si dice *minorante* per X. Un insieme si dice *limitato* se è limitato inferiormente e superiormente (ovvero se ha maggioranti e minoranti); quindi X *limitato* se esistono $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $h \leq x \leq k$ per ogni $x \in X$. Osserviamo che è anche;

$$X \text{ limitato se e solo se } \exists c \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \text{ tali che } X \subset (c - \delta, c + \delta).$$

Come si esprime la condizione "h non è un minorante per X" o la condizione "k non è un maggiorante per X"? Se X ha un minorante h (maggiorante k) cosa sono gli elementi minori di h (maggiori di k)?

Un insieme numerico non vuoto si dice *non limitato inferiormente* se per ogni $h \in \mathbb{R}$ eisiste $x \in X$ tale che $x < h$; si dice *non limitato superiormente* se per ogni $k \in \mathbb{R}$ esiste $x \in X$ tale che $x > k$.

Osservazione 3 *Attenzione; non confondere il concetto di insieme limitato con il concetto di insieme finito.*

Massimi e minimi. Dato un insieme numerico non vuoto X, ha significato porre la seguente definizione;

Definizione 1 *M si dice massimo di X se verifica le seguenti condizioni:*

1. *$M \in X$*
2. *$x \leq M$ per ogni $x \in X$*

e si indica con il simbolo $\max X$.

Le condizioni imposte asseriscono che M è *massimo di X* se M è un *maggiorante per X che appartiene ad X*.

Definizione 2 *m si dice minimo di X se verifica le seguenti condizioni:*

1. *$m \in X$;*
2. *$x \geq m$ per ogni $x \in X$*

e si indica con $\min X$.

Le condizioni imposte asseriscono che m è *minimo di X* se m è un *minorante per X che appartiene a X*. Sussiste la seguente proposizione.

Proposizione 1 (Unicità del massimo) *Se l'insieme numerico X ammette massimo, allora tale massimo è unico (naturalmente analoga proposizione vale per il minimo).*

Dim:
Supponiamo che X ammetta M ed M' come massimi. Si avrà allora: $M \in X$, $M' \in X$, $x \leq M$ per ogni $x \in X$ e $x \leq M'$ per ogni $x \in X$. Pertanto, siccome $M' \in X$, si deve avere $M' \leq M$; analogamente, siccome $M \in X$, si deve avere $M \leq M'$; ne segue che $M = M'$. □

Osservazione 4 *Attenzione: la proposizione precedente garantisce l'unicità del massimo non il fatto che dato un insieme numerico esso abbia massimo.*

I seguenti esempi mostrano come insiemi numerici limitati possano non avere massimo o minimo.

$$X =]0,1],]0,1[, [0,1[.$$

Siamo ora in grado di enunciare l'**assioma di completezza**. Premettiamo i seguenti fatti. Sia X un insieme numerico limitato superiormente; in base alla definizione è non vuoto il seguente insieme numerico

$$M_X = \{M \in \mathbb{R} : M \text{ maggiorante per } X\}$$

cioè l'insieme dei maggioranti di X. Dalla stessa definizione segue che ogni elemento di X è un minorante per tale insieme, pertanto M_X è limitato inferiormente.

Definizione 3 (Assioma di completezza) *Dato un insieme numerico non vuoto X che sia limitato superiormente, l'insieme dei suoi maggioranti M_X ammette minimo in $\mathbb{R}$.*

Naturalmente vale la proposizione.

Proposizione 2 *Dato un insieme numerico non vuoto X che sia limitato inferiormente, l'insieme dei suoi minoranti m_X ammette massimo in $\mathbb{R}$.*

Dato quest'assioma, si può porre la seguente definizione;

Definizione 4 *Fissato un insieme numerico non vuoto X limitato superiormente porremo*

$$\sup X = \min M_X$$

e tale elemento si dirà estremo superiore di X.

Se X è un insieme numerico non vuoto che sia limitato inferiormente, porremo

$$\inf X = \max m_X$$

e tale elemento si dirà estremo inferiore di X.

Per la determinazione dell'estremo superiore od inferiore di un insieme numerico non vuoto sono importanti i seguenti criteri.

Criterio 1 *Dato un insieme numerico non vuoto X che sia limitato superiormente, si ha che*

$$\alpha = \sup X \textit{ se e solo se } \begin{cases} \forall x \in X : \alpha \geq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : \alpha - \varepsilon < x_\varepsilon. \end{cases}$$

Criterio 2 *Dato un insieme numerico non vuoto X che sia limitato inferiormente, si ha che*

$$\alpha = \inf X \textit{ se e solo se } \begin{cases} \forall x \in X : \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in X : \alpha + \varepsilon > x_\varepsilon. \end{cases}$$

I due precedenti criteri danno delle condizioni necessarie e sufficienti e pertanto atte ad individuare $\sup X$ e $\inf X$. Diamo la dimostrazione del Criterio 1, in quanto quella del secondo è analoga.

> Dim:
> Abbiamo che
>
> $$\alpha = \sup X \text{ se e solo se } \alpha = \min M_X$$
>
> e quindi se e solo se
>
> 1. $\alpha \in M_X$;
> 2. $z \geq \alpha, \quad \forall z \in M_X$.
>
> Osserviamo che 1. si ha se e solo se $\forall x \in X$, $x \leq \alpha$, mentre 2. si ha se e solo se ogni elemento di $\mathbb{R}$ minore di α non è maggiorante per X, e quindi se e solo se $\forall y \in \mathbb{R}$: $(y < \alpha \Rightarrow \exists x \in X$ tale che $y < x)$. Da ciò si deduce facilmente la tesi (basta prendere, per $\varepsilon > 0$ fissato, $y = \alpha - \varepsilon$). $\square$

Convenzione. Se X è un insieme numerico non limitato inferiormente porremo $\inf X = -\infty$; se invece X non è limitato superiormente porremo $\sup X = +\infty$. I simboli $+\infty$ e $-\infty$ avranno il solo significato dato dalle seguenti proprietà;

$$-\infty < +\infty$$
$$-\infty < a < +\infty, \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

con la notazione $\overline{\mathbb{R}}$ indicheremo l'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, che si leggerà come "insieme dei numeri reali ampliato". Si può, subito, porre il seguente
Problema: "si può estendere la addizione e il prodotto definito per gli elementi di $\mathbb{R}$ a questo nuovo insieme?".

Utilizzando i due simboli precedentemente introdotti si pone:

$$]a, +\infty\}) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \qquad [a, +\infty\}) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

questi insiemi si dicono, rispettivamente, semiretta illimitata superiormente aperta, chiusa, di primo estremo a. Cosa si potrá intendere con le notazioni: $(-\infty, a[; \quad (-\infty, a]$?

Conclusione. A conclusione di tutto quanto detto possiamo asserire quanto segue: si potrà dire di avere un sistema di numeri reali se si ha a disposizione un insieme $\mathbb{R}$, due operazioni $(+, \cdot)$, un confronto $(\leq)$ verificanti le proprietà 1)-15) e l'assioma di completezza (o una proprietà ad esso equivalente); cioè se si ha a disposizione un campo totalmente ordinato e completo. Per ulteriori considerazioni che qui non facciamo potremo sempre parlare **del** campo totalmente ordinato dei numeri reali.

Avvertenza. Nel contesto in cui operiamo dobbiamo ancora "riconoscere" chi sono i numeri naturali, chi i numeri relativi, chi i numeri razionali!

I naturali; i relativi ed i razionali. Supponiamo di avere il campo totalmente ordinato dei numeri reali, ci proponiamo di "individuare" in esso i numeri interi naturali, i numeri interi relativi ed i razionali.

Sia $A \subset \mathbb{R}$, diciamo che A è induttivo se esso verifica le condizioni

$$\begin{cases} 1 \in A \\ r \in A \Rightarrow (r+1) \in A. \end{cases}$$

È evidente che ci sono sottoinsiemi induttivi in $\mathbb{R}$. Poniamo, per definizione

$$\mathbb{N} = \bigcap \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ induttivo}\}.$$

Dalla precedente definizione segue subito che

- $\mathbb{N}$ è non vuoto $(1 \in \mathbb{N})$ ed induttivo;
- se S è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ ed S è induttivo allora deve risultare $S = \mathbb{N}$.

Diciamo $\mathbb{N}$ "l'insieme dei numeri interi naturali"; $\mathbb{N}$ coincide con l'insieme

$$\{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots\};$$

poniamo poi $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} \cup \{0\}$ e lo diciamo "insieme dei numeri relativi". Infine poniamo $\mathbb{Q} = \{pq^{-1} : p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\}$ e lo diciamo "insieme dei numeri razionali". L'insieme $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si dice insieme dei numeri irrazionali.

Capitolo 2

Il Principio di Induzione

Diamo la seguente proposizione.

Proposizione 3 *Ogni insieme numerico finito ammette massimo e minimo.*

Come dimostrare questa proposizione? Ci è d'aiuto il seguente principio, diretta conseguenza della definizione di $\mathbb{N}$.

Proposizione 4 (Principio di Induzione) *Supponiamo di avere*

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$$

una famiglia di proposizioni indicizzate con i numeri interi naturali; supponiamo inoltre che tali proposizioni siano o vere o false. Se

1. P_1 *è vera;*
2. $\forall k \in \mathbb{N}$, P_k *vera implica* P_{k+1} *vera;*

allora P_n *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$

Dim:
Indichiamo con

$$S = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ è vera}\}.$$

Basterà provare che $S = \mathbb{N}$. S è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$,non vuoto (per l'ipotesi 1) l'elemento $1 \in S$). Inoltre se $h \in S$ ne segue che P_h è vera e quindi (per 2)) sarà P_{h+1} vera, cioè $(h+1) \in S$. Avremo così che S è un sottoinsieme non vuoto induttivo di $\mathbb{N}$; perciò dovrà coincidere con $\mathbb{N}$. Da ciò la tesi. $\square$

2.1 Proprietà dei Numeri Reali

P1) **$\mathbb{N}$ non è limitato superiormente.**
Supponiamo infatti che lo sia; per l'assioma di completezza, esso ammetterà estremo superiore $\lambda \in \mathbb{R}$. Per la seconda proprietà dell'estremo superiore esisterà $m \in \mathbb{N}$ per cui $\lambda - 1 < m$; ne segue perció che $\lambda < m+1$, ma ciò è assurdo per la prima proprietà dell'estremo superiore, tenendo conto che $(m+1) \in \mathbb{N}$ (essendo $\mathbb{N}$ induttivo).

P1') **$\mathbb{N}$ è chiuso per l'addizione** (si prova per induzione).

P1") **$1 = \min \mathbb{N}$.**

P2) **$\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a \leq b$, esiste $n \in \mathbb{N}$ per cui $na > b$ (proprietà di Archimede).**
Supponiamo che esistano a e b in $\mathbb{R}$ con $0 < a \leq b$ per cui si abbia $na \leq b$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Da ciò seguirebbe che $n \leq b/a$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque $\mathbb{N}$ sarebbe limitato superiormente, e ciò è contro P1).

P3) **$\forall q \in \mathbb{N}$, esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $|n - m| > q$.**
Se ciò non fosse vero $\mathbb{N}$ sarebbe limitato superiormente.

P4) **$\forall a, y \in R$ tali che $a \leq y \leq a + 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $a = y$.**
Siccome $a \leq y$, basterà provare che non può essere $a < y$. Se fosse $a < y$, si avrebbe $y - a > 0$. In questo caso se $y - a > 1$, allora $y > a + 1$ (contro l'ipotesi); se $y - a < 1$, esisterebbe un $m \in \mathbb{N}$ per cui $m(y - a) > 1$, quindi $y > a + 1/m$ per un qualche $m \in \mathbb{N}$ (contro l'ipotesi).

P5) **$\forall x \in \mathbb{R}$, esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n \leq x \leq n + 1$.**
Basta osservare che $|x| < m$ per un qualche $m \in \mathbb{N}$; quindi $-m \leq x \leq m$; pertanto essendo un numero finito di lementi di $\mathbb{Z}$ tra $-m$ e m, ci sarà quello richiesto (cioè il più grande tra quelli minori di x).

Per procedere ulteriormente diamo le seguenti definizioni.

Definizione 5 *La coppia di insiemi numerici non vuoti (A, B) si dice separata se $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$, $a < b$. Si dice invece contigua se, oltre ad essere separata, risulta che $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ si ha che $\exists a \in A$ e $\exists b \in B$ tali che $b - a < \varepsilon$. Si dice costituire una sezione di $\mathbb{R}$ se è contigua ed inoltre risulta $\mathbb{R} = A \cup B$. Data una coppia di insiemi numerici non vuoti (A, B) che sia separata, ogni elemento $c \in \mathbb{R}$ per cui*

$$a \leq c \leq b, \quad \forall a \in A, \forall b \in B,$$

si dice elemento di separazione (della coppia).

P6) Data una coppia separata di insiemi numerici (A, B), si ha che A è limitato superiormente, B è limitato inferiormente e risulta $\sup A \leq \inf B$.

P7) Data una coppia contigua di insiemi numerici (A, B), si ha che $\sup A = \inf B$ (ricordare che $a \leq c \leq d \leq b$ implica $|d - c| \leq |b - a|$ e P4)).

P8) Data una sezione di $\mathbb{R}$, si ha che essa ammette un unico elemento di separazione (la proprietà P7) è equivalente all'assioma di completezza).

P9) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, esiste $r \in Q$ tale che $r \leq x < r + \varepsilon$.
Per $\varepsilon > 0$ fissato, scegliamo $q \in \mathbb{N}$ per cui $q\varepsilon > 1$. Per P5), sia $p \in \mathbb{Z}$ per cui $p \leq qx < p + 1$. Allora $p/q \leq x < p/q + 1/q < p/q + \varepsilon$; pertanto il numero razionale $r = p/q$ verifica quanto richiesto.

P10) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, esiste $r \in Q$ tale che $a < r \leq b$. Posto $\varepsilon = b - a > 0$, per P9), esiste $r \in \mathbb{Q}$ per cui $r \leq b < r+(b-a)$; ne segue che $b-(b-a) < r$. Pertanto $a < r \leq b$.

P11) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$, esistono $q, r \in \mathbb{N}$ con $r < m$ per cui $n = mq + r$.

P12) $\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$, allora $|n - m| \geq 1$.
Basta considerare la P11) ed osservare che se $n \neq m$ è sicuramente $q > 1$ oppure $r \neq 0$.

Teorema 1 *Ogni sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *che sia non vuoto, ammette minimo.*

Dim:
Sia H l'insieme di $\mathbb{N}$ non vuoto considerato; e sia x un suo elemento.
Il seguente sottoinsieme di H

$$S = \{n \in H : n \leq x\}$$

è finito e quindi ammette minimo per quanto detto sugli insiemi aventi un numero finito di elementi. Tale minimo è anche minimo di H. $\square$

Esercizio 1 *Non esiste alcun numero razionale positivo il cui quadrato sia* 2.

Supponiamo che un siffatto numero razionale esista (e supponiamo sia non negativo). Pertanto esisteranno $p, q \in \mathbb{N}$ per cui si ha che $p^2 = 2q^2$. Tenendo conto della unicità della decomposizione dei numeri interi in fattori primi, si può dedurre che la uguaglianza precedente è falsa, in quanto nei due membri il fattore primo 2 compare un numero differente di volte.

Sussiste però il seguente risultato:

P13) $\forall a \in \mathbb{R}$ con $a > 0$, esiste un unico $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ tale che $x^2 = a$ (esistenza della radice quadrata aritmetica).

Dim:
Intanto proviamo che un siffatto x, se esiste, è unico. Siano $0 < x < y$ elementi di $\mathbb{R}$; moltiplicando nei tre membri della disuguaglianza per x (e per y) ed utilizzando la transitività del confronto si deduce che: $0 < x^2 < y^2$. E questo basta per provare la unicità.
Consideriamo ora il seguente insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x^2 \leq a\}.$$

Esso è limitato superiormente ed è non vuoto, difatti il numero $\alpha = \min(1,a) \in A$ ed il numero $\beta = \max(1,a)$ è un maggiorante per A. Dunque A ammette estremo superiore; poniamo $y = \sup A \in \mathbb{R}$. Siccome $y \geq \alpha > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < y$. Pertanto siccome $0 < y - \varepsilon < y < y + \varepsilon$, si ottiene:

$$(y-\varepsilon)^2 < y^2 < (y+\varepsilon)^2.$$

Inoltre esisterà un $x \in A$ per cui

$$(y-\varepsilon)^2 < x^2 \leq a.$$

Sarà perciò $(y-\varepsilon)^2 < a$ e siccome $y+\varepsilon \notin A$ dovrà essere $a < (y+\varepsilon)^2$. Pertanto

$$(y-\varepsilon)^2 < a < (y+\varepsilon)^2.$$

Ne segue che $|y^2 - a| < 4y\varepsilon$. Per l'arbitrarietà di ε, segue che $y^2 = a$.
$\square$

Si può osservare che il seguente insieme

$$A_{\mathbb{Q}} = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0, r^2 < 2\}$$

è non vuoto ed ha lo stesso estremo superiore dell'insieme A; allora P13) (con $a = 2$) ed il precedente esercizio dimostrano che $\mathbb{Q}$ non è completo.

Teorema 2 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta S ed $\mathbb{R}$; detta corrispondenza è determinata quando si fissino due punti O (corrispondente di 0) ed U (corrispondente di 1) su S ed essa conserva l'ordine.*

Dato $P \in S$ il numero reale corrispondente si dice **ascissa** di P.

Capitolo 3

Gli Intorni

Consideriamo x_0 un elemento reale; si dice intorno di x_0 ogni intervallo aperto del tipo $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, essendo $\delta > 0$. Per intorno di $-\infty$ si intende ogni semiretta aperta illimitata inferiormente e per intorno di $+\infty$ ogni semiretta aperta illimitata superiormente.
In generale gli intorni saranno indicati con i simboli:

$$I_{(x_0)}; \quad I_{(x_0,\delta)}$$

ed analoghi.

Gli intorni verificano le seguenti proprietá:

Proposizione 5

I_1) *Ogni intorno é non vuoto;*

I_2) *La intersezione di due intorni di uno stesso punto é ancora intorno del punto;*

I_3) *Assegnati due punti distinti, siano x ed y, esiste un intorno di x ed un intorno di y che hanno intersezione vuota.*

La nozione di intorno permette di considerare alcune classi di insiemi.

Se A é un sottoinsieme numerico, si dice che é **Aperto** se ogni suo punto possiede un intorno tutto contenuto in A; si dice che A **Chiuso** se il suo complementare $(\mathbb{R} - A)$ é aperto. Il fatto che A è aperto si può indicare in questo modo $A = int(A)$; mentre se A è chiuso si può denotare con $A = \bar{A}$.

Esempio 1 *Come si comportano gli insiemi aperti (chiusi) rispetto alle operazioni di unione ed intersezione ?*

Un concetto fondamentale per il seguito é quello di **Punto di Accumulazione**. Fissato un insieme numerico A un punto x_0 si dice *punto di accumulazione per A quando in ogni suo intorno vi é almeno un punto di A differente da x_0.* La nozione precedente puó essere interpretata come la formalizzazione dell'avvicinarsi ad x_0 con elementi di A.

É facile dimostrare che se A ammette un punto di accumulazione allora esso ha infiniti punti. Viceversa se un insieme A ammette infiniti elementi allora ammette almeno un punto di accumulazione e si puó essere piú precisi nel senso specificato dal seguente teorema.

Teorema 3 *Ogni sottoinsieme numerico A che abbia infiniti elementi e sia anche limitato ammette almeno un punto di accumulazione reale. (Questo teorema é noto come teorema di* **Bolzano-Weierstrass***)*

Supponendo che $A \subset [a, b]$, la dimostrazione del teorema si basa su un processo iterativo per la costruzione di una famiglia di intervalli, indicizzata sui numeri interi, sia $I_n = [a_n, b_n]$, verificante le seguenti condizioni:

A_1 **)** $I_(n + 1) \subset I_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

A_2 **)** I_n ha infiniti elementi di A;

A_2 **)** $b_n - a_n < (b - a)/2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

La costruzione procede in questo modo. Considerato l'intervallo [a,b], lo si divide in due parti uguali prendendo il punto medio; almeno una delle due parti deve contenere infiniti elementi di A; se entrambi le parti contegnono infiniti elementi di A si scelga comunque la parte a sinistra (o comunque quella a destra) e si proceda ripetendo l'operazione per l'intervallo cosí costruito; si vede facilmente che gli insiemi $\{a_n | a_n = inf I_n\}$ e $\{b_n | b_n = sup I_n\}$ sono contigui e l'elemento di separazione é un punto di accumulazione per A.

Capitolo 4

I Numeri Complessi

Consideriamo il seguente problema:

P) Assegnato $a \in \mathbb{R}$ con $a < 0$, determinare $x \in \mathbb{R}$ tale che si abbia $x^2 = a$.

Tale problema non ha soluzioni reali. Nel campo dei numeri complessi che definiremo in questo paragrafo il problema precedente sarà risolubile. Osserviamo subito che il campo dei numeri complessi non si presenta come insieme totalmente ordinato- ovvero in esso non sará possibile definire un ordine che sia compatibile con le operazioni di somma e prodotto (basta osservare che la compatibilitá del prodotto rispetto al confronto assicura che il prodotto di un numero per se stesso é non negativo).

Ricordiamo che date le coppie ordinate (a, b) e (α, β) risulta, per definizione $(a, b) = (\alpha, \beta)$ se e solo se $a = \alpha$ e $b = \beta$. Si dice campo dei numeri complessi l'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ munito delle seguenti operazioni

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d);$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

È lasciato al lettore il compito di verificare che tali operazioni (definite a partire dalle operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{R}$) godono delle proprietà 1)-8) e 13) di cui alla Lezione 1 sui numeri reali; in particolare si determini l'elemento neutro per l'addizione ed il prodotto, l'opposto ed il reciproco di una coppia che non sia l'elemento neutro per l'addizione.

La struttura algebrica così determinata si denoterà con il simbolo $\mathbb{C}$, sottointendendo le due precedenti operazioni. $\mathbb{C}$ contiene un sottocampo che si può "identificare" con il campo totalmente ordinato dei numeri reali, esso è: $\{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$; porremo perciò $(a, 0) \equiv a$ e tale insieme lo identificheremo con $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{C}$ particolare importanza assume il seguente numero $(0, 1)$, indicato con la lettera i e detto unità immaginaria. Si osservi che

$$i^2 = (-1, 0); \quad i^3 = (0, -1); \quad i^4 = (1, 0); \quad i^5 = i.$$

Pertanto le potenze di i si ripetono secondo multipli di 4 (più brevemente: sono periodiche di periodo 4).

4.1 Forma Algebrica dei Numeri Complessi

Poniamo $z = (a, b)$ ed osserviamo che, in virtù delle operazioni definite e delle notazioni utilizzate, si può scrivere:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib.$$

Diremo che $a+ib$ è la *forma algebrica* del numero complesso (a, b). Questa forma è particolarmente utile perchè le operazioni algebriche tra numeri complessi possono essere "tradotte" in forma algebrica e si può operare con le usuali regole del calcolo letterale, semplicemente tenendo conto di quanto detto sulle potenze di i.

Dato $z = a + ib$, si pone

$$\begin{array}{ll} a = \mathrm{Re}(z) & \text{(parte reale di } z\text{);} \\ b = \mathrm{Im}(z) & \text{(coefficiente dell'immaginario di } z\text{);} \\ ib & \text{(parte immaginaria di } z\text{);} \\ \overline{z} = a - ib & \text{(complesso coniugato di } z\text{).} \end{array}$$

Si può pensare alla applicazione da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ definita in questo modo:

$$z \in \mathbb{C} \to \overline{z} \in \mathbb{C};$$

$$((a, b) \in \mathbb{C} \to (a, -b) \in C).$$

Tale applicazione gode delle seguenti prorprietà;

$0 \leq |z|$ per ogni $z \in C$;

$z \in \mathbb{R}$ se e solo se $z = \overline{z}$;

$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$; $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$ se $z \neq (0, 0)$;

$\overline{\overline{z}} = z$;

$\mathrm{Re}(z) = (z + \overline{z})/2$; $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/(2i)$;

$z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.

La seguente applicazione si riduce alla funzione valore assoluto già definita in $\mathbb{R}$:

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R} \quad \text{se } z = (a, b) = a + ib;$$

$$|z| = (z\overline{z})^{1/2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Il numero $|z|$ si dice modulo di z. La funzione precedente verifica le seguenti condizioni;

1. $|z| \geq 0$
2. $|z| = 0$ se e solo se $z = 0$ (cioè l'elemento neutro di $\mathbb{C}$ rispetto alla addizione);
3. $|z| = |\overline{z}|$;
4. $|zw| = |z| \cdot |w|$;
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$;
6. $||z| - |w|| \leq |z - w|$;
7. $\max(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$.

4.2 Rappresentazione geometrica dei numeri complessi

Se in un piano consideriamo un riferimento di coordinate ortogonali Oxy, possiamo costruire una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{C}$ ed i punti del piano. Basta far corrispondere ad ogni numero complesso $z = a + ib$ il punto di coordinate (a, b). In questo modo il piano prende il nome di piano complesso, l'asse x quello di asse reale e l'asse y quello di asse immaginario.

È facile rendersi conto che con tale rappresentazione due numeri complessi coniugati hanno una rappresentazione mediante due punti simmetrici rispetto all'asse x, mentre due numeri complessi opposti sono simmetrici rispetto all'origine che è il corrispondente del numero complesso 0. D'altra parte il modulo di un numero è rappresentato dalla lunghezza del segmento congiungente l'origine degli assi con il punto del piano che rappresenta il numero complesso. Pertanto i numeri complessi aventi modulo costante ϱ sono tutti rappresentati dai punti della circonferenza centrata nell'origine degli assi e raggio uguale a ϱ.

La rappresentazione precedente permette di dare una "visualizzazione" della operazione di addizione tra numeri complessi attraverso la quale si possono dimostrare alcune delle precedenti proprietà.

Si vede subito, infatti, che la somma tra due numeri complessi corrisponde alla "regola del parallelogramma", pertanto 4) e 5) altro non sono che note proprietà dei lati di un triangolo (e per questo motivo si dicono proprietà triangolari).

Una differente rappresentazione dei numeri complessi permette di "visualizzare" anche l'operazione di prodotto tra due numeri complessi. Si tratta della *forma trigonometrica* dei numeri complessi.

4.3 Forma trigonometrica dei numeri complessi

Fissiamo, nel piano complesso, un verso positivo delle rotazioni attorno all'origine degli assi, e sia il verso antiorario. Preso un numero complesso $z = a + ib$ e il punto ad esso corrispondente nel piano complesso $P = (a, b)$, osserviamo che tale punto è univocamente individuato dalla sua distanza dall'origine (uguale al modulo di z) e dall'angolo che che il segmento OP "forma" con il semiasse positivo delle x; la misura in radianti ϑ di tale angolo si dice *anomalia* o *argomento* di z.

Pertanto ad ogni $z \in \mathbb{C}$ non nullo è associabile una coppia numerica, $[\varrho, \vartheta]$ dove $\varrho > 0$ e $\vartheta \in \mathbb{R}$. Si osservi ora che non è vero che se $[\varrho, \vartheta] \neq [\varrho, \vartheta']$ allora esse provengano da due numeri complessi distinti. Difatti se $\vartheta = \vartheta' + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$, allora esse devono rappresentare uno stesso numero complesso. Riguardando i numeri complessi in questa nuova forma si dovrà sempre tenere conto del fatto che coppie distinte possono rappresentare lo stesso numero complesso se le prime coordinate coincidono e le seconde differiscono per un multiplo di 2π.

Si dice che ϑ è *argomento principale* di z se ϑ è argomento di z e risulta $-\pi < \vartheta \leq \pi$.

Se $z = a + ib$ è un numero complesso, ϱ il suo modulo e ϑ un suo argomento, si hanno le ovvie relazioni:

$$\begin{cases} a = \varrho \cos \vartheta \\ b = \varrho \sin \vartheta, \end{cases} \qquad \varrho = \sqrt{a^2 + b^2};$$

e per $z \neq 0$ si ha perciò $\cos \vartheta = a \varrho^{-1}$, $\sin \vartheta = b \varrho^{-1}$. Ne segue la seguente rappresentazione:

$$z = (a, b) = a + ib = \varrho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta);$$

l'ultimo membro della precedente uguaglianza si dice *forma trigonometrica* di z.

Utilizzando note formule di trigonometria si può stabilire quanto segue:
Il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomenti la somma degli argomenti

$$[\varrho_1, \vartheta_1] + [\varrho_2, \vartheta_2] = [\varrho_1 \varrho_2, \vartheta_1 + \vartheta_2].$$

Questa proprietà permette una buona "visualizzazione" del prodotto di due numeri complessi nel piano complesso.

4.4 Radici n-esime dei numeri complessi

Ricordiamo che dato un numero α ed un intero $n \in \mathbb{N}$ si dice potenza n-esima di α il numero $\alpha^n = \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha$ (prodotto di n fattori tutti uguali ad α). Dato allora $z \neq 0$ ed $n \in \mathbb{N}$ diremo radice n-esima di z il numero w per cui si abbia $w^n = z$. Se $z = (a, b) = [\varrho, \vartheta]$ e $w = (\alpha, \beta) = [r, \varphi]$, si dovrà avere

$$[r, \varphi]^n = [r^n, n\varphi] = [\varrho, \vartheta].$$

Perciò deve essere $r^n = \varrho$ ed $n\varphi - \vartheta = 2\pi k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Dunque $r = \sqrt[n]{\varrho}$ e $\varphi = (\vartheta + 2\pi k)/n$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ne segue che ogni numero complesso

$$w_k = \left[\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\vartheta + 2\pi k}{n} \right], \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

è una radice n-esima del numero complesso z. Sembrerebbe allora che esistano infinite radici n-esime di un numero complesso non nullo z. Si ha però la seguente proprietà:

Dato un numero complesso z non nullo ed $n \in \mathbb{N}$, esistono solo n radici n-esime distinte di z.

Da quanto detto prima segue che due radici n-esime di z differiscono solo per gli argomenti; considerati due argomenti relativi ad $h \in \mathbb{Z}$ e a $k \in \mathbb{Z}$, rispettivamente si ha che la loro differenza è data dal numero $2\pi(h-k)/n$. Pertanto se $(h-k)$ è un multiplo di n, i due argomenti differiscono per un multiplo di n e quindi le due radici n-esime da esse rappresentate coincidono. In generale, se h e k divisi per n danno lo stesso resto, allora i due argomenti differiscono per un multiplo di 2π e quindi ancora le due radici n-esime da essi rappresentate coincidono. Pertanto ci saranno tante radici n-esime distinte di z quanti sono i resti distinti di un intero diviso per n; siccome tali resti sono n (cioè $0, 1, 2, \ldots, n-1$) si avranno n radici n-esime distinte di z. La formula (4.1) fornisce il modulo e gli argomenti distinti di tali radici n-esime quando si prenda $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

Capitolo 5

Successioni

Sia X un insieme qualsiasi; diciamo **successione** di elementi di X (o più brevemente in X o a valori in X) ogni funzione $f : \mathbb{N} \to X$. In generale si indica il corrispondente di ogni $n \in \mathbb{N}$ non con il simbolo $f(n)$ ma con i simboli a_n, x_n, y_n ... (si dicono elementi della successione) e la successione con una di queste notazioni

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n), \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}, \text{ ecc.}$$

L'insieme $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ si dice **insieme dei valori** della successione; esso non è da confondere con l'insieme degli elementi della successione.

Supponiamo di considerare una successione reale (a_n); possiamo dare le seguenti definizioni:

- (a_n) cresente se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a_{n+1}$;
- (a_n) decrescente se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq a_{n+1}$;
- (a_n) strettamente crescente se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $a_n < a_{n+1}$;
- (a_n) strettamente decrescente se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $a_n > a_{n+1}$;

se la successione verifica una delle prime due condizioni, ma non vogliamo specificare quale, diremo che la successione è monotona, se verifica una delle ultime due condizioni, ma non vogliamo specificare quale, diremo che è strettamente monotona. Inoltre

- (a_n) limitata superiormente se e solo se $\exists M \in \mathbb{R}$: $a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) limitata inferiormente se e solo se $\exists M \in \mathbb{R}$: $a_n \geq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) limitata se e solo se $\exists M \in \mathbb{R}$: $|a_n| \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, se e solo se $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $\alpha \leq a_n \leq \beta$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- (a_n) non limitata superiormente se e solo se $\forall M \in \mathbb{R}$: $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \geq M$;

- (a_n) non limitata inferiormente se e solo se $\forall M \in \mathbb{R}$: $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \leq M$.

Naturalmente le definizioni possono essere date anche per successioni a valori in X purché in tale insieme i secondi membri delle precedenti definizioni abbiano significato.

Successione estratta. La nozione di successione estratta può essere data per una generica successione. Sia perciò assegnata una successione a valori in X; supponiamo $f : \mathbb{N} \to X$; considerata una qualsiasi successione **strettamente crescente di interi naturali** $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la successione $f \circ g : \mathbb{N} \to X$ si dice una successione estratta dalla successione f. Naturalmente ogni successione ammette infinite estratte. La definizione ora posta formalizza una semplicissima operazione di estrazione di elementi di una assegnata successione. Supponiamo infatti di avere la successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, si può passare alla seguente operazione scorrere sugli indici della successione data ed estrarre man mano alcuni elementi della successione si ottiene così una nuova successione del tipo (primo elemento considerato), (secondo elemento considerato), ... La notazione più usuale per denotare una successione estratta da una data successione (a_n) è la seguente: (a_{k_n}). È facile convincersi che $\forall n \in \mathbb{N}$: $k_n \geq n$ (questa proprietà sarà spesso utilizzata in seguito).
Altri concetti utili nella trattazione generale delle successioni sono quelli di **proprietà verificata definitivamente** e di **proprietà verificata frequentemente**. Data una successione (a_n) ed una proprietà P relativa agli elementi della successione:

- (a_n) verifica definitivamente P se e solo se solo un numero finito di elementi della successione non verifica P, cioè se e solo se esiste $\nu \in \mathbb{N}$: $n > \nu$ implica a_n verifica P;

- (a_n) verifica frequentemente P se e solo se infiniti elementi della successione verificano P, cioè se e solo se esiste una estratta che verifica definitivamente P, e ancora se e solo se $\forall \nu \in \mathbb{N}$: $\exists n > \nu$ per cui a_n verifica P.

È lasciato come esercizio la formulazione delle seguenti definizioni

- (a_n) definitivamente limitata superiormente se e solo se?

- (a_n) definitivamente limitata inferiormente se e solo se?

e la dimostrazione che

Proposizione 6 *Ogni successione reale definitivamente limitata superiormente (risp. inferiormente) è limitata superiormente (risp. inferiormente).*

5.1 Limiti di successioni reali

Sia assegnata una successione reale (a_n) e sia $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che λ verifichi la seguente condizione:

(*) $\forall I(\lambda)$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$: $(n > \nu$ allora $a_n \in I(\lambda))$.

La condizione (*) caratterizza λ; difatti vale il seguente

Teorema 4 *Se per la successione (a_n) e λ vale la condizione (*), allora λ è unico.*

> DIM:
> Supponiamo che la condizione (*) sia verificata per λ e λ' e sia anche $\lambda \neq \lambda'$; per la proprietà di separazione degli intorni, ci saranno due intorni, uno di λ ed uno di λ', siano I e I', aventi intersezione vuota. Siccome abbiamo supposto che (*) vale sia per λ che per λ', in corrispondenza di I potremo determinare un indice ν per sui si abbia: $n > \nu$ allora $a_n \in I$; analogamente in corrispondenza di I' potremo determinare un indice ν' per cui si abbia: $n > \nu'$ allora $a_n \in I'$. Ne segue che preso $\nu'' = \max\{\nu; \nu'\}$, risulta: $n > \nu''$ allora $a_n \in I$ e $a_n \in I'$, cioè I e I' hanno punti in comune contro la scelta fatta. □

Ha significato allora porre la seguente definizione:

Definizione 6 *La successione (a_n) ha limite λ se λ verifica (*).*

Si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$$

o più brevemente

$$\lim a_n = \lambda$$

e si dice che λ **è limite della successione** o che **la successione è regolare**. Più precisamente se λ è un numero reale, si dice che la successione **converge** a λ o che è convergente; se $\lambda = +\infty$ si dice che la successione diverge positivamente; se $\lambda = -\infty$ si dice che la successione diverge negativamente.

Il teorema precedente può essere formulato, tenendo conto della definizione posta, in questa maniera:

se una successione ammette limite, esso è unico.

Naturalmente è da chiedersi se ci sono successioni regolari, convergenti, non regolari, ecc. Una prima importante proposizione asserisce l'esistenza di successioni regolari.

Proposizione 7 *Ogni successione monotona (o strettamente monotona) è regolare, in particolare è convergente se è limitata, avendosi:*

(a_n) *crescente o strettamente crescente, allora*

$$\exists \lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\};$$

(a_n) *decrescente o strettamente decrescente, allora*

$$\exists \lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dim:
Supponiamo che (a_n) sia monotona crescente e limitata e diciamo

$$\lambda = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}(\in \mathbb{R}).$$

Si ha subito che

$$a_n \leq \lambda < \lambda + \varepsilon \tag{5.1}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$, per la seconda proprietà dell'estremo superiore, si otterrà: $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda - \varepsilon < a_\nu$. Pertanto, tenuto conto della crescenza della successione, si ha

$$n > \nu \Rightarrow a_n \geq a_\nu > \lambda - \varepsilon. \tag{5.2}$$

In conclusione, per (5.1) e (5.2), si ottiene la tesi. Le dimostrazioni relative agli altri casi sono lasciate per esercizio. □

La seguente proposizione permette di dare esempi di successioni non regolari.

Proposizione 8 *Data una successione regolare, tutte le sue estratte sono regolari ed hanno lo stesso limite.*

Dim:
Sia data la successione (a_n) regolare avente limite λ, e consideriamo una sua estratta (a_{k_n}). Fissato un generico intorno di λ, sia I, esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che: ($n > \nu$, allora $a_n \in I$). Siccome $k_n > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ottiene che è anche: $a_{k_n} \in I$. Quindi la tesi. □

La proposizione precedente può essere utilizzata per dimostrare che una successione non è regolare: **se per una data successione si possono considerare due sue estratte che sono regolari ma hanno differenti limiti, allora la successione data non è regolare**.

Esercizio 2 *Se due estratte di una successione sono regolari ed hanno lo stesso limite, quando possiamo asserire che la successione data è regolare?*

Proposizione 9 *Ogni successione convergente è limitata.*

DIM:
Data la successione convergente (a_n), diciamo λ il limite della successione. Fissato $\varepsilon = 1$, esisterà un indice ν per cui

$$\lambda - 1 < a_n < \lambda + 1, \quad \forall n > \nu.$$

Pertanto la successione data è definitivamente limitata. Consideriamo adesso i due insiemi

$$X = \{a_1, a_1, \dots, a_\nu, \lambda - 1\}, \quad Y = \{a_1, a_2, \dots, a_\nu, \lambda + 1\}.$$

Indichiamo con $m = \max X$ e con $M = \max Y$. Risulta subito $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

È evidente che una successione divergente positivamente è illimitata superiormente e che una successione divergente negativamente è illimitata inferiormente.

Proposizione 10 *Ogni successione limitata ammette una estratta convergente.*

DIM:
Senza ledere in generalità possiamo supporre che la successione sia formata da elementi definitivamente distinti, e siccome la successione è limitata, che essa abbia tutti gli elementi compresi nell'intervallo (a, b). Come in una precedente dimostrazione (teorema di Bolzano-Weierstrass), possiamo considerare una successione di sottointervalli di (a, b), siano $I_n = [a_n, b_n]$, verificanti le seguenti condizioni:

- $I_n \subset I_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$;
- I_n contiene infiniti elementi della successione;
- $|I_n| = b_n - a_n \leq (b - a)/2^n$.

Utilizzando l'assioma della scelta, con un ragionamento non molto difficile si può costruire una estratta dalla successione data che converge al numero $\lambda = \sup\{\inf I_n\} = \inf\{\sup I_n\}$. □

Può essere, talvolta, utile sapere se una successione converge senza conoscerne il limite. A dare risposta a questo problema ci è di aiuto la seguente definizione.

Definizione 7 *Una successione* (a_n) *si dice* **di Cauchy** *se e solo se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\nu \in \mathbb{N}$ *tale che* $\forall n, m \in \mathbb{N}$*:*

$$(n, m > \nu \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon).$$

Sussistono i seguenti risultati.

1. Ogni successione convergente è di Cauchy.

2. Ogni successione di Cauchy è limitata.
3. Se una successione di Cauchy ammette una estratta convergente, allora essa stessa è convergente (e naturalmente avrà lo stesso limite della estratta).

Dim:

1. Sia (a_n) una successione reale convergente a $\lambda \in \mathbb{R}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\varepsilon' = \varepsilon/2$, poichè la successione converge a λ, esisterà un indice $\nu \in \mathbb{N}$ per cui:
$$\forall n \in \mathbb{N}(n > \nu \Rightarrow |a_n - \lambda| < \varepsilon').$$
Pertanto $n, m > \nu$ implica $|a_n - a_m| \leq |a_n - \lambda| + |a_m - \lambda| < \varepsilon$. Dunque la successione è di Cauchy.
2. Data una successione di Cauchy, sia (a_n), fissiamo $\varepsilon = 1$; allora esiste $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tale che $n, m \geq \nu$, implica $|a_n - a_m| < 1$. Ne segue, scelto $m = \nu_1$, che $a_{\nu_1} - 1 < a_n < a_{\nu_1} + 1$ per ogni $n \geq \nu_1$. Pertanto la succesione data è definitivamente limitata e quindi limitata.
3. Supponiamo che la successione di Cauchy (a_n) ammetta una estratta convergente, sia (a_{n_k}), al limite $\lambda \in \mathbb{R}$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\varepsilon' = \varepsilon/2$; esisterà un indice $\nu \in \mathbb{N}$ per cui si abbia contemporaneamente
$$(n, m > \nu \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon');$$
$$(n > \nu \Rightarrow |a_{k_n} - \lambda| < \varepsilon').$$
Per $n > \nu$, siccome $k_n \geq n$, si ha:
$$|a_n - \lambda| < |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \lambda| < \varepsilon' + \varepsilon'.$$
Se ne deduce che:
$$(n > \nu \Rightarrow |a_n - \lambda| < \varepsilon).$$

□

Siamo ora in grado di provare il seguente Teorema.

Teorema 5 (a_n) *è convergente se e solo se* (a_n) *è di Cauchy.*

Dim:

⇒: È la 1. già dimostrata.

⇐: Si osservi che per 2. la successione di Cauchy data è limitata e pertanto essa ammette una successione estratta convergente e dunque, per 3., la successione data è convergente.

□

Operazioni con i limiti di successioni. Indichiamo che

$$S = \{(a_n) : (a_n) \text{ successione reale}\}.$$

In S possiamo introdurre alcune operazioni (algebriche).

Addizione: $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$;

Prodotto: $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n)$;

Rapporto: $(a_n)/(b_n) = (a_n/b_n)$ se $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

Moltiplicazione per uno scalare: $\lambda(a_n) = (\lambda a_n)$ (questa operazione è un caso particolare del prodotto, basta prendere $b_n = \lambda \ \forall n$).

Se indichiamo con S_r il sottoinsieme di S costituito dalle successioni regolari, ci si può chiedere se un tale sottoinsieme è chiuso rispetto alle precedenti operazioni (cioè se la somma, il prodotto, ecc., di due elementi di S_r è ancora un elemento di S_r e il prodotto di un elemento di S_r con un numero reale è ancora un elemento di S_r). Inoltre si può pensare al "limite di una successione regolare" come una funzione di S_r in $\mathbb{R}$; in questo contesto ci si può chiedere come si comporta la funzione "limite" rispetto alle operazioni algebriche.

Per poter dare una formulazione "compatta" alla risposta al quesito posto, premettiamo alcune "convenzioni" (la giustificazione delle quali può essere rinviata senza ledere la generalità del discorso). Come si ricorda i simboli $+\infty$ e $-\infty$ sono stati introdotti assegnando un significato solo rispetto alla relazione d'ordine.

Per quanto riguarda il loro comportamento rispetto alle operazioni algebriche di $\mathbb{R}$, poniamo quanto segue:

$$\begin{array}{ll}
a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty & \forall a \in \mathbb{R}; \\
a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty & \forall a \in \mathbb{R}; \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty; & (-\infty) + (-\infty) = -\infty; \\
a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = & \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \text{ oppure } a = +\infty \\ -\infty & \text{se } a < 0 \text{ oppure } a = -\infty; \end{cases} \\
a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = & \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \text{ oppure } a = +\infty \\ +\infty & \text{se } a < 0 \text{ oppure } a = -\infty. \end{cases}
\end{array}$$

Si osservi che non assegniamo alcun significato alle seguenti scritture

$$\begin{array}{ll}
(+\infty) - (+\infty); & (-\infty) - (-\infty); \\
(-\infty) + (+\infty); & 0 \cdot (\pm\infty); \\
(\pm\infty) \cdot 0; & 0/0; \pm\infty/\pm\infty.
\end{array}$$

Queste ultime si dicono **forme indeterminate**.

Enunciamo il Teorema sulle "operazioni con i limiti".

Teorema 6 *Indichiamo con ϑ una delle operazioni algebriche di $\mathbb{R}$ $(+; -; \cdot; /)$. Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni regolari (cioè elementi di S_r) e supponiamo* *che λ e η siano i rispettivi limiti. Consideriamo poi la successione $(\vartheta(a_n, b_n))_n$ (definita cioè mediante la operazione ϑ come sopra). Se $\vartheta(\lambda, \eta)$ non è forma indeterminata allora si ha che*

$$\exists \lim \vartheta(a_n, b_n) = \vartheta(\lambda, \eta).$$

Prima di passare alla dimostrazione di qualche caso particolare del teorema precedente è opportuno notare che esso indica un procedimento per la determinazione del limite di una seccessione quando essa è somma, prodotto (o differenza, rapporto) di altre successioni. Siccome inoltre il teorema è formulato come condizione sufficiente, è bene fare attenzione al fatto che la tesi del teorema, relativamente alla esistenza del limite, può essere vera anche se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte.

Dim:
Proviamo che $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ quando il secondo membro non è una forma indeterminata. In particolare supponiamo che il limite della successione (a_n) sia λ ed il limite di (b_n) sia μ ed entrambi siano reali. Fissiamo $\varepsilon > 0$, siano ν_1 e ν_2 interi positivi per cui si abbia:

$$n > \nu_1 \Rightarrow \lambda - \frac{\varepsilon}{2} < a_n < \lambda + \frac{\varepsilon}{2};$$

$$n > \nu_2 \Rightarrow \mu - \frac{\varepsilon}{2} < b_n < \mu + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per $n > \nu_3 = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, sommando membro a membro, si ottiene

$$\lambda + \mu - \varepsilon < a_n + b_n < \lambda + \mu + \varepsilon.$$

Le dimostrazioni per gli altri casi sono lasciate come esercizio. □

A complemento del commento dato per il teorema precedente, diamo alcuni teoremi relativi ad "operazioni con i limiti" che non sono, in generale, deducibili dal teorema precedentemente dato. La situazione che si presenta in questi teoremi può essere così sintetizzata: per una delle due successioni in questione si sa che ammette limite il quale può condurre ad una forma indeterminata, allora si impongono delle condizioni sulla seconda successione in modo che impediscano il verificarsi della forma indeterminata.

Ricordiamo che una successione si dice infinitesima se ha limite 0.

Proposizione 11

- *Siano (a_n) e (b_n) due successioni e supponiamo che (a_n) sia infinitesima. Se (b_n) è limitata allora la successione prodotto $(a_n b_n)$ è infinitesima.*
- *Siano (a_n) e (b_n) due successioni e supponiamo che (a_n) sia divergente positivamente. Se esiste $c > 0$ per cui $b_n \geq c$ definitivamente, allora la successione prodotto è divergente positivamente; se invece esiste $c < 0$ tale che $b_n \leq c$ definitivamente, allora la successione prodotto diverge negativamente.*

- *Siano (a_n) e (b_n) due successioni e supponiamo che (a_n) sia divergente negativamente. Se esiste $c > 0$ per cui $b_n \geq c$ definitivamente, allora la successione prodotto è divergente negativamente; se invece esiste $c < 0$ per cui $b_n \leq c$ definitivamente, allora la successione prodotto diverge positivamente.*

- *Siano (a_n) e (b_n) due successioni e supponiamo (a_n) sia divergente positivamente. Se esiste $c \in \mathbb{R}$ per cui $b_n \geq c$ definitivamente, allora la successione $a_n + b_n$ è divergente positivamente.*

- *Siano (a_n) e (b_n) due successioni e supponiamo (a_n) sia divergente negativamente. Se esiste $c \in \mathbb{R}$ per cui $b_n \leq c$ definitivamente, allora la successione $a_n + b_n$ è divergente negativamente.*

Una particolare attenzione è da riservare alla forma $\lambda/0$ con $\lambda \neq 0$.

Proposizione 12 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni e supponiamo che (b_n) sia infinitesima, mentre (a_n) abbia limite $\lambda \neq 0$. Se definitivamente risulta $b_n > 0$ (< 0), allora la successione (a_n/b_n) è regolare ed ha limite $\lambda \cdot (+\infty)$ ($\lambda \cdot (-\infty)$).*

5.2 Altri teoremi sui limiti delle successioni

Teoremi di confronto.

a) Sia (a_n) una successione regolare avente limite positivo (eventualmente $+\infty$), allora $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $(n > \nu \Rightarrow a_n > 0)$.

b) Sia (a_n) una successione regolare avente termini positivi, allora il limite (se esiste) è maggiore od uguale a 0.

c) Siano (a_n), (b_n) e (c_n) tre successioni per cui si abbia $\exists \lim a_n = \lambda$, $\exists \lim c_n = \lambda$; $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $(n > \nu \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n)$,
risulta $\quad \exists \lim b_n = \lambda$.

d) Siano (a_n) e (b_n) due successioni numeriche con $a_n \leq b_n$ definitivamente. Se (a_n) diverge positivamente, allora anche (b_n) è divergente positivamente. Se (b_n) è divergente negativamente, allora anche (a_n) lo è.

e) Date due successioni numeriche (a_n) e (b_n) regolari ed aventi limite λ e μ rispettivamente si ha;

- $\lambda > \mu$ implica $a_n > b_n$ definitivamente;
- $a_n > b_n$ definitivamente, implica $\lambda \geq \mu$.

Capitolo 6

Successioni e Topologia

Utilizzando il concetto di successione e di limite di una successione si possono chiarire ulteriormente alcuni concetti e nello stesso tempo definirne di nuovi.

Teorema 7 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e chiuso ($A = \bar{A}$).*

$$x_0 \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n) \text{ tale che } \begin{cases} x_n \in A & \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim x_n = x_0. \end{cases}$$

DIM:
Fissiamo $x_0 \in \overline{A}$; se esso è un elemento di A, non c'è nulla da provare, basta prendere $x_n = x_0$ per ogni n; se invece non appartiene ad A allora esso deve appartenere ai punti di accumulazione per A; in questo caso è facile costrure una successione come richiesto. Il viceversa è altrettanto evidente. □

Definizione 8 *$X \subset \mathbb{R}$ insieme non vuoto. X si dice compatto (per successioni) se e solo se da ogni successione di elementi di X se ne può estrarre una convergente ad un elemento di X.*

I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ sono completamente caratterizzati dal seguente teorema.

Teorema 8 *X è compatto in $\mathbb{R}$ se e solo se X è chiuso e limitato.*

DIM:
Sia x un elemento della chiusura di X; si può considerare una successione di elementi di X convergente a tale punto x. Poichè X è compatto, una successione estratta dovrà convergere ad un elemento di X; tenendo conto dell'unicità del limite e che ogni estratta ha lo stesso limite della successione da cui è estratta, ne segue che x deve appartenere ad X (quindi X è chiuso). Supponiamo poi che X non sia limitato superiormente, allora potremmo considerare una successione di elementi di X che sia divergente superiormente e da questa

estrarne una che converge ad un elemento di X, il che è assurdo. Analoga conclusione si ottiene supponendo che X sia non limitato inferiormente. Pertanto X è chiuso e limitato.

Viceversa data una successione di elementi di X, essa è sicuramente limitata e quindi ammette una estratta convergente; per il teorema precedente tale estratta converge ad un punto della chiusura di X e quindi, siccome esso è chiuso, ad un punto di X. $\square$

Esercizio 3 *Sia A un insieme chiuso di $\mathbb{R}$, e sia x un punto non appartenente ad A. Provare che:*

1. *$\exists \min\{|x-y| : y \in A\}$;*
2. *se A è un intervallo allora il punto di minimo di cui sopra è unico (l'ipotesi che A sia un intervallo può essere eliminata o cambiata?);*
3. *sotto quali condizioni su A si può asserire che*

$$\exists \max\{|x-y| : y \in A\}?$$

Consideriamo un insieme numerico A non vuoto, ed x un elemento che non appartiene ad A. Risulta

$$\inf\{|x-y| : y \in A\} = \min\{|x-y| : y \in \overline{A}\}$$

$$\sup\{|x-y| : y \in A\} = \max\{|x-y| : y \in \overline{A}\}?$$

Posto

$$d(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A, y \in B\},$$

risulta

$$d(A,B) = \min\{|x-y| : x \in \overline{A}, y \in \overline{B}\}?$$

6.1 Alcuni risultati su particolari successioni numeriche

Sia data una successione numerica (a_n); se ne possono considerare altre due mediante le relazioni

$$b_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

(media aritmetica dei primi n termini della successione data),

$$c_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}, \text{ se } a_i > 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

(media geometrica dei primi n termini della successione data).

Teorema 9 *Se la successione (a_n) è regolare anche la successione (b_n) è regolare ed ha lo stesso limite.*

Dim:
Se si ha
$$\lim a_n = l \in \mathbb{R},$$
allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $|a_n - l| < \varepsilon$ per ogni $n \geq \nu$. Ma allora
$$|b_n - l| \leq \frac{1}{|n|} \sum_{i=1}^{n} |a_i - l| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\nu} |a_i - l| + \frac{n-\nu}{n}\varepsilon,$$
da cui il teorema. □

Corollario 1 *Abbiamo i seguenti risultati:*

a) *la uguaglianza* $\lim a_n/n = \lim(a_n - a_{n-1})$ *è sicuramente valida se la successione a secondo membro è regolare;*

b) *date due successioni* (a_n) *e* (b_n)*, con la seconda monotona e divergente, si ha che*
$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$
purchè il secondo limite esista;

c) *date due successioni infinitesime con la seconda monotona, vale la stessa conclusione di b).*

Teorema 10 *La successione* (c_n) *è regolare se lo è la* (a_n) *ed ha lo stesso limite.*

Come si possono formulare a), b) e c)?

6.2 Il numero di Nepero

Consideriamo la successione che ha come termine n-esimo
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$
Tenendo conto della formula del binomio, si ottiene che:
$$a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
e che
$$2 < a_n < 3.$$
Inoltre essa é strettamente crescente, pertanto deve convergere ad un numero reale che diciamo **Numero di Nepero** ed indichiamo con la lettera e.

Capitolo 7

Serie numeriche

Strettamente legata alla teoria delle successioni è la teoria delle serie numeriche. Questa teoria è finalizzata a dare significato, mediante un passaggio al limite, all'operazione di addizione nel caso di infiniti addendi, e quindi può essere riguardata come una operazione sulle successioni reali.

Sia data una successione reale (a_n). Possiamo subito considerare una nuova successione definita in questo modo:

$$s_1 = a_1;$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\dots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\dots$$

Tale successione si dice *successione delle somme parziali.* Questa operazione si dice *serie* ed è indicata con la notazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Gli elementi della successione di partenza si dicono termini della serie.

Definizione 9 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ha somma* $s \in \mathbb{R}$ *se e solo se* $\lim s_n = s$ *(si dice anche che è convergente ad ha somma* s*).* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge positivamente se e solo se* $\lim s_n = +\infty$*.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge negativamente se e solo se* $\lim s_n = -\infty$*.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è indeterminata se la successione* (s_n) *è non regolare.*

Osservazioni.

- Il carattere di una serie non cambia se si sostituisce un numero finito di elementi;

- Per la seguente serie (geometrica di ragione h) $\sum_{n=1}^{\infty} h^n$ si ha che

$$\sum_{n=1}^{\infty} h^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } h \geq 1 \\ \text{non regolare} & \text{se } h \leq 1 \\ \frac{1}{1-h} & \text{se } |h| < 1. \end{cases}$$

Sussiste il seguente criterio generale di convergenza.

Teorema 11 (Criterio di Cauchy) *Data una serie di termine generale a_n, si ha*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ converge } \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} : \forall n, p \in \mathbb{N}, (n > \nu \Rightarrow |\sum_{n=1}^{p} a_{n+i}| < \varepsilon).$$

Dim:
Considerata la successione delle somme parziali (s_n), si ha che essa è convergente e quindi di Cauchy; ciò è equivalente a dire che: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\forall p \in \mathbb{N}$, $n > \nu$ implica $|s_{n+p} - s_n| \varepsilon$. □

Corollario 2 *Se la serie di termine generale a_n è convergente, allora deve risultare;*

$$\lim a_n = 0.$$

Definizione 10 *Si dice che una serie di termine generale a_n è assolutamente convergente se è convergente la serie di termine generale $|a_n|$.*

Proposizione 13 *Se una serie è assolutamente convergente, allora essa è convergente.*

Osservazione. Proveremo successivamente, con un esempio, che non vale il viceversa. La proposizione precedente può essere presa a giustificazione di alcuni criteri che daremo in seguito.

Definizione 11 *Data una serie di termine generale a_n, si dice resto parziale n-esimo la serie ottenuta dalla data sopprimendo i primi n termini, cioè*

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i.$$

Teorema 12 *Se la serie di termine generale a_n è convergente, ogni serie resto parziale n-esimo è convergente e si ha* $\lim R_n = 0$.

Un breve commento. Abbiamo detto all'inizio che la teoria delle successioni è strettamente legata alla teoria delle serie. Come si è potuto rilevare dalle definizioni poste, lo studio e il carattere delle serie si fonda sullo studio e il carattere della successione delle somme parziali. È evidente che per studiare una successione si può ricorrere allo studio di una serie di cui la successione data sia la successione delle somme parziali; difatti data la successione reale (s_n) possiamo considerare la serie di termini

$$a_1 = s_1, a_2 = s_2 - s_1, \ldots, a_n = s_n - s_{n-1}, \ldots$$

È evidente che la successione delle somme parziali di tale serie è proprio la successione numerica inizialmente data.

Problemi.

- Data una serie di termine generale a_n, cosa possiamo dire della serie di termine generale λa_n?
- Date due serie di termini generali a_n e b_n, cosa possiamo dire della serie di termine generale $a_n \pm b_n$?

7.1 Criteri di convergenza

Tenendo conto di una proposizione precedente, daremo alcuni generalissimi criteri di convergenza solo per serie a termini non negativi.

Proposizione 14 *Ogni serie a termini non negativi (definitivamente) è regolare e se ha la successione delle somme parziali limitata, allora converge.*

Proposizione 15 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali a termini positivi; supponiamo che $a_n \leq b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

- $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$
- $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty.$$

Proposizione 16 *Siano (a_n) e (b_n) due successioni reali a termini positivi; supponiamo che $\exists h, k \in \mathbb{R}$ per cui si abbia*

$$0 < h \leq \frac{a_n}{b_n} \leq k, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le serie di termine generale a_n e b_n hanno lo stesso carattere (cioè o hanno entrambe somma finita o entrambe divergono positivamente).

Esercizio 4 *La serie di termine generale $a_n = 1/n$ è divergente positivamente (tale serie è detta serie armonica).*

Siccome è a termini non negativi la serie in questione è regolare; se fosse convergente dovrebbe verificare la condizione data dal criterio di Cauchy. Osserviamo però che:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto la condizione espressa dal criterio di Cauchy non si potrà verificare poichè $s_{2n} - s_n > 1/2$.

Osserviamo esplicitamente che in questo esempio il termine generale è infinitesimo, ma la serie non converge.

- La serie di termine generale $a_n = 1/n^\alpha$ è divergente positivamente se $\alpha \leq 1$.

Basta osservare che, nelle ipotesi poste, risulta $1/n < 1/n^\alpha$.

- La serie di termine generale $a_n = 1/n^\alpha$ è convergente se $\alpha > 1$.

Basterà provare che la successione delle somme parziali è limitata, e siccome è monotona crescente, basterà provare che è limitata una sua estratta. Consideriamo allora la sua estratta data da s_{2^p-1}.

$$\begin{aligned} s_{2^p-1} &= \sum_{n=1}^{2^p-1} \frac{1}{n^\alpha} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha + \frac{1}{3^\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha + \ldots \frac{1}{7^\alpha}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(2^{p-1})^\alpha + \frac{1}{(2^p-1)^\alpha}}\right) \\ &< 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \ldots + \frac{(2^{p-1})}{(2^{p-1})^\alpha} \\ &< \frac{2^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1}-1} \leq c. \end{aligned}$$

7.2 I criteri della radice e del rapporto

Teorema 13 (Criterio della radice) *Data una serie a termine generale a_n non negativo, se esiste un numero reale h per cui si abbia $0 \leq h < 1$ e*

$$\sqrt[n]{a_n} \leq h, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora la serie converge. Se invece $\sqrt[n]{a_n} > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora la serie diverge positivamente.

Teorema 14 (Criterio del rapporto) *Data una serie a termine generale a_n non negativo, se esiste un numero reale h per cui si abbia $0 < h < 1$ e*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq h, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

allora la serie converge. Se

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

allora la serie diverge positivamente.

Le ipotesi espresse nei due criteri precedenti, generalmente si deducono (nelle applicazioni) dallo studio dei seguenti limiti;

$$\lim \sqrt[n]{a_n} \quad , \quad \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Si hanno precisamente le seguenti proposizioni;

Proposizione 17 *Data una serie a termine generale a_n non negativo, se esiste il*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lambda,$$

si ha:

- *se $\lambda < 1$ allora la serie converge;*
- *se $\lambda > 1$ allora la serie diverge positivamente;*
- *se $\lambda = 1$ nulla si può concludere, in generale, circa il carattere della serie (anche se si sa che è regolare).*

Data una serie a termine generale a_n non negativo, se esiste il

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda,$$

si ha:

- *se $\lambda < 1$ allora la serie converge;*
- *se $\lambda > 1$ allora la serie diverge positivamente;*
- *se $\lambda = 1$ nulla si può concludere, in generale, circa il carattere della serie (anche se si sa che è regolare).*

Teorema 15 (Condensazione di Cauchy) *Data una serie a termine generale a_n non negativo e decrescente risulta che la serie stessa e la serie di termine generale $2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso carattere.*

7.3 Criteri di convergenza non assoluta

Per le serie di termine generale di segno non costantemente positivo, non si danno teoremi generali di convergenza che non si deducano dallo studio della serie avente come termine generale il valore assoluto del termine generale della serie data e applicando il legame tra convergenza assoluta e convergenza. Per particolari serie numeriche, le cosidette serie a termini alternati, si possono dare però dei criteri di convergenza.

Definizione 12 *Data una successione di termine generale a_n non negativo (o non positivo), la serie di termine generale $(-1)^{n-1}a_n$ si dice serie a segni alterni (o alternati).*

Teorema 16 (Leibniz) *Sia data una serie a segni alternati di termine generale $(-1)^{n-1}a_n$, con a_n decrescente ed infinitesima, allora la serie è convergente.*

Dim:
Consideriamo la successione delle somme parziali della serie, ed osserviamo che

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq s_{2n+1};$$

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n} - a_{2n+1} \geq s_{2n};$$

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geq s_{2n}.$$

Pertanto per la successione delle somme parziali la successione estratta di indici pari è crescente e quella di indici dispari è decrescente (e pertanto sono entrambe regolari). Per la terza diseguaglianza entrambre devono essere convergenti (in quanto (s_{2n}) crescente e limitata superiormente e (s_{2n+1}) decrescente e limitata uniformemente). Siccome infine $s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$, poichè la successione (a_n) è infinitesima, entrambe le estratte devono convergere allo stesso limite; per un esercizio proposto si ha che tale limite è anche il limite della successione delle somme parziali. □

7.4 Algebra delle serie numeriche

Proprietà associativa. Data una serie di termine generale a_n si ha quanto segue; fissata una qualsiasi successione strettamente crescente di interi positivi n_k, si consideri la serie di termine generale b_k dato da $b_k = a_{n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_k}$. Se la serie di termine generale a_n converge, allora converge anche la serie di termine generale b_k; se invece diverge positivamente (negativamente), analogamente si comporta la serie di termine generale b_k.

Più in generale possiamo enunciare un teorema di regolarità per i riordinamenti di una serie a termini non negativi. Data una serie di termine generale a_n ed una funzione bigettiva di $\mathbb{N}$ in se', sia $J : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si dice che la serie di termine generale b_n è un riordinamento della serie data se risulta $b_n = a_{J(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 18 *Data una serie a termini positivi, si ha che:*

- *se la serie converge, allora ogni suo riordinamento converge alla stessa somma della serie data;*

- *se la serie diverge positivamente, allora ogni suo riordinamento diverge positivamente.*

La precedente proposizione è vera anche per le serie assolutamente convergenti. Si ha però.

Teorema 17 *Data una seria convergente ma non assolutamente, allora comunque si fissi un numero reale s esiste un riordinamento che è convergente ed ha somma s.*

Capitolo 8

Funzioni reali di variabile reale

Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ (cioè un insieme numerico); ogni funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice **funzione reale di variabile reale**. L'insieme $f(X) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in X, f(x) = y\}$ si dice **codominio di** f (esso è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$). Tenendo conto di una classificazione data per insiemi numerici, si possono dare le seguenti definizioni.

Definizione 13 *Data una funzione $f : X \to \mathbb{R}$;*

- *f limitata inferiormente se e solo se $f(X)$ limitato inferiormente se e solo se $\exists M \in \mathbb{R}$: $f(x) \geq M$ per ogni $x \in X$.*

- *f limitata superiormente se e solo se $f(X)$ limitato superiormente se e solo se $\exists M \in \mathbb{R}$: $f(x) \leq M$ per ogni $x \in X$.*

- *f limitata se e solo se $f(X)$ limitato se e solo se $\exists M \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in X$.*

- $e'_f = \inf_{x \in X} f(x)$ *se e solo se*
$$e'_f = \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

- $e''_f = \sup_{x \in X} f(x)$ *se e solo se*
$$e''_f = \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

  È lasciato come esercizio la formulazione delle proprietà caratteristiche di e'_f e e''_f.

- $m = \min_{x \in X} f(x)$ *se e solo se*
$$m = \min\{f(x) : x \in X\}.$$

- *$M = \max_{x\in X} f(x)$ se e solo se*

$$M = \max\{f(x) : x \in X\}.$$

  Evidentemente si ha:

- *$m = \min_{x\in X} f$ se e solo se*
  1. *$\exists x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = m$;*
  2. *$m \leq f(x)\ \forall x \in X$.*

  Un punto $x_0 \in X$ per cui vale 1. e 2. si dice **punto di minimo (assoluto) per f in X** *(naturalmente non è detto che sia unico).*

- *$M = \max_{x\in X} f$ se e solo se*
  1. *$\exists x_0 \in X$ tale che $f(x_0) = M$;*
  2. *$M \geq f(x)\ \forall x \in X$.*

  Un punto $x_0 \in X$ per cui vale 1. e 2. si dice **punto di massimo (assoluto) per f in X** *(naturalmente non è detto che sia unico).*

  Può succedere che un punto di X verifichi le condizioni 1. e 2. solo in un suo intorno, cioè; dato $x_0 \in X$

$$\exists I(x_0) : (x \in X \cap I(x_0) \Rightarrow f(x) \leq (\geq) f(x_0)). \tag{8.1}$$

  In questa situazione si dice che x_0 è un punto di massimo relativo (minimo relativo) di f in X.
  Sono semplici le seguenti osservazioni.

- *Sia f una funzione monotona definita su un insieme chiuso e limitato, allora f ammette massimo e minimo.*

  Supponendo che f sia crescente, siccome X è chiuso e limitato, esso avrà un elemento massimo ed un elemento minimo, siano x_1 ed x_2. Pertanto $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ per ogni $x \in X$.

- *Se $f : X \to \mathbb{R}$ è una funzione ed $Y \subset X$, si ha:*

$$\inf_{x\in X} f \leq \inf_{x\in Y} f \leq \sup_{x\in Y} f \leq \sup_{x\in X} f.$$

8.1 Limiti delle funzioni reali di variabile reale

Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale; sia x_0 un punto di accumulazione per X (può non appartenere ad X e potrebbe anche essere $\pm\infty$), sia infine $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

Diremo che λ è il limite della funzione f per x che tende a x_0 se si verifica la seguente condizione

$$\forall I(\lambda) \exists I(x_0) \forall x \in (X \setminus x_0) : (x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) \in I(\lambda)). \tag{8.2}$$

Si scriverà

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda.$$

Teorema 18 *Se λ verifica (8.2), allora esso è unico.*

(la dimostrazione di questa proposizione è analoga al teorema sull'unicità del limite delle successioni).

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, diremo che la funzione, per x che tende a x_0, converge a λ; se $\lambda = +\infty$ diremo che diverge positivamente, per x che tende ad x_0; se invece $\lambda = -\infty$ diremo che, per x che tende a x_0, diverge negativamente.

Esercizio 5 *Riscrivere la condizione (8.2), esplicitando gli intorni, distinguendo i casi in cui x_0 e λ sono reali ovvero sono entrambi $\pm\infty$, oppure uno dei due è reale e l'altro è $\pm\infty$.*

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, può succedere che si abbia che:

$$\forall \delta > 0, X \cap]x_0, x_0 + \delta[\neq \emptyset \quad (X \cap]x_0 - \delta, x_0[\neq \emptyset);$$

diremo allora che x_0 è un punto di accumulazione a destra (a sinistra) per X.

Naturalmente punti di accumulazione a destra o a sinistra sono punti di accumulazione per X.

Ha significato definire, con x_0 di accumulazione a destra per X,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lambda$$

se e solo se $\forall I(\lambda)$ esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in X$:

$$x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \in I(\lambda)$$

che diremo **limite di f per x che tende ad x_0 da destra**. Cosa significherà limite di f per x che tende a x_0 da sinistra?

Sussiste la seguente proposizione.

Proposizione 19 *Sia x_0 punto di accumulazione a destra e a sinistra per X; allora si ha che: la esistenza del limite per x che tende a x_0 equivale alla esistenza del limite a destra ed a sinistra ed alla loro eguaglianza.*

Osservazione. Naturalmente la proposizione precedente può essere utilizzata in negativo; se, cioè, il limite a destra ed a sinistra esistono ma sono diversi, oppure uno dei due non esiste, allora la funzione non ha limite in x_0.

La successiva proposizione stabilisce una importante relazione tra il limite di una funzione e il limite di successioni di suoi valori.

Proposizione 20 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed x_0 un punto di accumulazione per X, $\quad \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

se e solo se $\forall (x_n)$ tale che $x_n \in X \setminus x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$\lim x_n = x_0 \Rightarrow \lim f(x_n) = \lambda.$$

DIM:
Sia (x_n) una successione di elementi di X con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ ed avente limite x_0. Fissato un intorno I di λ esisterà un intorno di x_0, sia J, tale che

$$\forall x \in (X \setminus x_0) : (x \in J \Rightarrow f(x) \in I).$$

In corrispondenza dell'intorno J, siccome la successione (x_n) converge ad x_0, esisterà un indice $\nu \in \mathbb{N}$ per cui si avrà

$$n > \nu \Rightarrow x_n \in J.$$

Pertanto: $n > \nu \Rightarrow x_n \in J \Rightarrow f(x_n) \in I$. Ciò assicura che è $\lim f(x_n) = \lambda$.

Viceversa, supponiamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ e che λ non verifichi la condizione di limite;

$$\exists I(\lambda) : \forall J(x_0) \exists x \in (X \setminus x_0) \cap J(x_0) : f(x) \notin I(\lambda).$$

Possiamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$, considerare un elemento $x_n \in (X \setminus x_0) \cap J_n(x_0)$ per cui $f(x_n) \notin I(\lambda)$, essendo $J_n(x_0) =]x_0 - 1/n, x_0 + 1/n[$. Ne segue che la successione (x_n) verifica le ipotesi, pertanto deve essere $\lim f(x_n) = \lambda$. Per questo motivo dovrà risultare, definitivamente, $f(x_n) \in I(\lambda)$; il che è assurdo. □

Naturalmente la proposizione precedente può essere utilizzata in negativo in maniera analoga a quanto riportato nella precedente osservazione.

Esercizio 6 *Formulare esplicitamente quanto è stato detto nella osservazione.*

Osservazione. Il concetto di limite di una funzione è un concetto di tipo locale(basta osservare la struttura della definizione); pertanto è da sottolineare che ipotesi sul limite di una funzione in un punto potranno condurre solo ad informazioni sulla funzione vicino al punto.

Per le funzioni monotone si ha il seguente

Teorema 19 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona; x_0 punto di accumulazione a destra e/o a sinistra per X. Si ha che:*

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \begin{cases} \inf\{f(x) : x \in X, x > x_0\} & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \sup\{f(x) : x \in X, x > x_0\} & \text{se } f \text{ è decrescente} \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in X, x < x_0\} & \text{se } f \text{ è crescente} \\ \inf\{f(x) : x \in X, x < x_0\} & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Inoltre se il punto è di accumulazione a destra e a sinistra i due limiti esistono finiti (ma non é detto che coincidano).

Inoltre si può provare la seguente proposizione.

Proposizione 21 *Data $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed x_0 punto di accumulazione per X, si ha che:*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{R},$$

allora $\exists M \in \mathbb{R}$ e $I(x_0)$ tale che $|f(x)| < M$ per ogni $x \in (X \setminus x_0) \cap I(x_0)$ (cioè f è localmente limitata in x_0).

Notazione. Diremo che f è infinitesima per x che tende ad x_0 se f ha limite zero in x_0.

La seguente proposizione riguarda il comportamento dell'operazione di limite rispetto alle operazioni algebriche (è bene confrontare questi risultati con gli analoghi rispetto al limite di successioni).

Teorema 20 *Siano $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sia x_0 punto di accumulazione per X; θ una delle operazioni elementari e poniamo $\theta(f,g)(x) = f(x)\theta g(x)$ $\forall x \in X$. Siano infine*

$$\lambda_1 = \lim_{x \to x_0} f(x), \quad \lambda_2 = \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Se $\theta(\lambda_1, \lambda_2)$ non è una forma indeterminata, allora risulta che

$$\lim_{x \to x_0} \theta(f,g)(x) = \theta(\lambda_1, \lambda_2).$$

È possibile altresì formulare le seguenti proposizioni.

A) Siano $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sia x_0 punto di accumulazione per X; se f diverge positivamente (negativamente) per x che tende ad x_0 e se g è limitata inferiormente (superiormente) in un fissato intorno di x_0, allora la funzione $f + g$ diverge positivamente (negativamente) per x che tende a x_0.

B) Siano $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sia x_0 punto di accumulazione per X; se f diverge positivamente (negativamente) per x che tende ad x_0 si ha che

- se g ammette, in un fissato intorno di x_0, un minorante positivo, allora fg diverge positivamente (negativamente);
- se g ammette, in un fissato intorno di x_0, un maggiorante negativo, allora fg diverge negativamente (positivamente).

C) Siano $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sia x_0 punto di accumulazione per X; se f è infinitesima per x che tende a x_0 e g è limitata in un fissato intorno di x_0, allora la funzione fg è infinitesima per x che tende a x_0.

D) Siano $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sia x_0 punto di accumulazione per X; supponiamo che g sia infinitesima per x che tende a x_0, e che f abbia limite λ diverso da zero per x che tende ad x_0; si ha che:

- se g ha segno strettamente positivo (negativo) in un fissato intorno di x_0, allora
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \cdot +\infty (\lambda \cdot -\infty);$$
- se in ogni intorno di x_0 esistono punti in cui g è positiva e punti in cui è negativa, allora il limite precedente non esiste.

Naturalmente anche nel caso dei limiti di funzioni possiamo dare teoremi di confronto.

Teorema 21 *Siano $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sia x_0 punto di accumulazione per X; supponiamo che λ_1 e λ_2 siano i limiti di f e g rispettivamente, per x che tende a x_0.*

- *$\lambda_1 > \lambda_2$, allora esiste $I(x_0)$ tale che $\forall x \in X \setminus x_0$: $(x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) > g(x))$;*
- *$\exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in X \setminus x_0$: $(x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) > g(x))$, allora $\lambda_1 \geq \lambda_2$;*
- *se $\lambda_2 = +\infty$ ed $\exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in X \setminus x_0$: $(x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) > g(x))$, allora $\lambda_1 = +\infty$;*
- *se $\lambda_1 = -\infty$ ed $\exists I(x_0)$ tale che $\forall x \in X \setminus x_0$: $(x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) > g(x))$, allora $\lambda_2 = -\infty$.*

Negli ultimi due risultati non é necessario ipotizzare l'esistenza di entrambi i due limiti, basta ipotizzarla per uno per assicurare l'esistenza dell'altro limite.

Esercizio 7 *Riformulare le ultime due asserzioni del teorema alla luce di quanto detto.*

Teorema 22 *Siano $f, g, h : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; sia x_0 punto di accumulazione per X; supponiamo che λ_1 e λ_2 siano i limiti di f e g rispettivamente, per x che tende a x_0. Se $\lambda_1 = \lambda_2$ e se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ in un fissato intorno di x_0, allora h ammette limite per x che tende ad x_0 ed esso coincide con λ_1 (o λ_2).*

Teorema 23 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed x_0 punto di accumulazione per X; supponiamo che esista il limite di f per x che tende ad x_0.*

- $\lim f(x) = \lambda$ *allora* $\lim |f(x)| = |\lambda|$;
- $\lim f(x) = 0$ *se e solo se* $\lim |f(x)| = 0$.

Esercizio 8 *Confrontare i precedenti teoremi con gli analoghi sulle successioni numeriche. Successivamente dimostrarli.*

Il seguente teorema è proprio dei limiti di funzioni.

Teorema 24 (Limite di funzioni composte) *Siano f e g due funzioni reali con f definita in X e g definita in Y e tali che abbia significato la funzione composta $g(f)$ ed essa sia definita in X; sia x_0 punto di accumulazione per X; supponiamo che*

1. *y_1 sia il limite di f per x che tende ad x_0;*
2. *y_1 sia punto di accumulazione per Y;*
3. *esista il limite di g per y che tende ad y_1 e sia λ;*
4. *esista un intorno di x_0 tale che per ogni suo punto appartenente ad X e diverso da x_0 si abbia $f(x) \neq y_1$.*

Allora

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda.$$

(N.B. La condizione 2. è conseguenza di 1. e 4.).

8.2 Limiti Notevoli

Diamo un elenco di **limiti notevoli**, attraverso i quali si possono calcolare, applicando gli opportuni teoremi, altri limiti di funzioni.

1. $$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1; \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

2. $$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1; \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

3. $$\lim_{x \to +\infty} x^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 0 & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

4. $$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

5. $$\lim_{x \to 0^+} x^b \ln x = 0 (b > 0), \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 (b > 0).$$

6. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 (a > 1, b > 0).$$

7. $$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

8. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

9. Se f è una delle funzioni elementari definite precedentemente, si ha che: per ogni x_0 elemento dell'insieme di definizione di f si ha
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

10. $$\lim_{x\to -\pi/2^+}\tan x = -\infty, \quad \lim_{x\to \pi/2^-}\tan x = +\infty.$$

11. $$\lim_{x\to -\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to +\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

12. $$\lim_{x\to 0^+}\cot x = +\infty, \quad \lim_{x\to \pi^-}\tan x = -\infty.$$

13. $$\lim_{x\to -\infty}\arctan x = \pi, \quad \lim_{x\to +\infty}\arctan x = 0.$$

14. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a(a\in\mathbb{R}).$$

15. $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1.$$

Dai precedenti limiti si possono dedurre i seguenti:

1. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{a^x} = 0(a>1).$$
   Basta osservare che
   $$\frac{\ln x}{a^x} = \frac{\ln x}{x^b}\frac{x^b}{a^x}$$
   e ricordare 6. ed il secondo di 5.

2. $$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^x = e^b.$$
   Il risultato è ovvio per $b=0$; altrimenti, considerando la variabile $y = x/b$, esso si ricava da 7. e da 9.

3. Analogo al precedente ma per $x\to -\infty$.

4.
$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1.$$

Basta tenere conto che

$$x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

ed ancora 7. e 9.

5.
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Basta effettuare la sostituzione $y = 1/x$.

6.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Basta effettuare la sostituzione $y = e^x - 1$.

7.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a (a > 0).$$

8.
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Basta moltiplicare numeratore e denominatore per $1 + \cos x$ ed applicare, in entrambi i casi, 8. e 9.

Capitolo 9

Funzioni continue

Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale; sia $x_0 \in X$ (pertanto ha significato $f(x_0)$).

Definizione 14 *f si dice continua in x_0 se e solo se x_0 è punto isolato di X oppure (se cioè x_0 è un punto di accumulazione per X)*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Supporremo che x_0 sia punto di accumulazione per X. È facile convincersi che: f continua in x_0 se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\forall x \in X$:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Si osservi che il δ di cui alla precedente definizione dipende da ε, da x_0 e dalla stessa funzione f.

Si dice che f **è continua in X se è continua in ogni punto di X**. f si dice **uniformemente continua in** X se f verifica la seguente condizione: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tale che $\forall x, y \in X$:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Si osservi che in questa definizione il δ dipende solo da ε e dalla funzione f, e non dai punti di X.

In base alla precedente osservazione è facile provare che se f è uniformemente continua in X allora essa è continua in X. In generale non vale il viceversa.

Un tipo particolare di funzioni uniformemente continue è dato dalle funzioni lipschitziane.

Definizione 15 *$f : X \to \mathbb{R}$ si dice lipschitziana in X se e solo se esiste $L > 0$ per cui*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in X.$$

9.1 Operazioni con le funzioni continue

Naturalmente, essendo la definizione di una funzione continua data attraverso la nozione di limite, molti teoremi dati per i limiti di funzioni potranno essere riformulati per le funzioni continue. Per esempio indicato con $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue in X e a valori in $\mathbb{R}$, è facile verificare che tale insieme è chiuso per la somma di funzioni e per il prodotto di un numero per una funzione (pertanto è un sottospazio vettoriale delle funzioni reali definite in X). Varranno anche teoremi del tipo "permanenza del segno" ecc.

Per quanto riguarda la composizione di funzioni continue è opportuno sottolineare il seguente teorema.

Teorema 25 *Siano f e g due funzioni definite in X ed Y rispettivamente, per cui abbia significato $g(f)$ e sia definita in X; x_0 punto di X in cui f abbia limite finito $y_1 \in Y$. Se g è continua in y_1, allora $g(f)$ è continua in x_0.*

9.2 Punti di discontinuità

Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale; sia $x_0 \in X$, osserviamo che f non continua in x_0 vuol dire che $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall \delta > 0$ esiste $x \in X$ per cui si abbia:

$$|x - x_0| < \delta \text{ ed } |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Nel caso però che f non sia continua in x_0, può succedere che esista il limite della funzione in x_0 e sia un numero finito; in questo caso si dice che f presenta in x_0 una **discontinuità eliminabile** (sostituendo ad $f(x_0)$ il valore del limite in x_0 si ottiene una nuova funzione che differisce dalla precedente solo nel punto x_0 ed è continua- sicuramente- in x_0).

Se ha significato il numero

$$s(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

esso si dice **salto della funzione in** x_0. Se $s(x_0) \in \mathbb{R}$ ed è $s(x_0) \neq 0$ si dice che f ha in x_0 una discontinuità di I specie; se $s(x_0) = \pm\infty$ oppure si presenta una forma indeterminata si dice che f ha in x_0 una discontinuità di II specie.

Proposizione 22 *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona, può avere, al massimo, un insieme numerabile di punti di discontinuità.*

9.3 Teoremi fondamentali delle funzioni continue

Problema Principale. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$. Allora,

- $X \subset \mathbb{R}$ di un "certo tipo" $\Rightarrow$ $f(X)$ di quale tipo?

- $Y \subset \mathbb{R}$ di un "certo tipo" $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ di quale tipo?

Teorema 26 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$ se e solo se $\forall A \subset \mathbb{R}$ $f^{-1}(A)$ aperto.*

> DIM:
> Sia A aperto e $x_0 \in f^{-1}(A)$. Evidentemente $f(x_0) \in A$. Siccome A è aperto, esiste un intorno J di $f(x_0)$ contenuto in A. Per la continuità di f in x_0 esisterà un intorno I di x_0 tale che $f(I) \subset J$; dunque tutti i punti di I stanno in $f^{-1}(A)$. Pertanto $f^{-1}(A)$ è aperto.
>
> Viceversa, sia $x_0 \in \mathbb{R}$, consideriamo $f(x_0)$ e fissiamo un suo intorno aperto, sia J; per l'ipotesi $B = f^{-1}(J)$ è un aperto a cui x_0 appartiene, pertanto esiste un intorno di x_0, sia I, tutto contenuto in B; ne segue che $f(I) \subset J$; e questo basta. $\square$

Teorema 27 (Esistenza degli zeri) *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in X; supponiamo che*

- *$\exists x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1)f(x_2) < 0$ ed $x_1 < x_2$;*
- *$[x_1, x_2] \subset X$.*

Allora esiste $x_0 \in]x_1, x_2[$ tale che $f(x_0) = 0$.

> DIM:
> Possiamo supporre senza ledere la generalità che $X = [x_1, x_2]$. Supponiamo poi che sia $f(x_1) < 0$ ed $f(x_2) > 0$. Per il teorema della permanenza del segno si avrà che
>
> $$\exists \delta > 0 \text{ per cui } x_1 \leq x < x_1 + \delta \Rightarrow f(x) < 0.$$
>
> Allora il seguente insieme
>
> $$S = \{x \in [x_1, x_2] : f(x) < 0\}$$
>
> è non vuoto e limitato superiormente; inoltre $x_2 \notin S$, essendo
>
> $$f(x_2) > 0.$$
>
> Per questo fatto, ancora per il teorema della permanenza del segno si avrà che $\exists \delta_1 > 0$ per cui $x_2 - \delta_1 < x \leq x_2$ implica $f(x) > 0$. Posto $x_0 = \sup S$, si ottiene, per quanto detto $x_1 < x < x_2$. Pertanto ha significato considerare $f(x_0)$. Se fosse $f(x_0) > 0$, per il teorema della permanenza del segno, si avrebbe che $\exists \mu > 0$ tale che $x_0 - \mu < x < x_0 + \mu$ implica $f(x) > 0$. Dunque $S \cap (x_0 - \mu, x_0) = \emptyset$, contro la seconda proprietà del sup. Se fosse $f(x_0) < 0$, per il teorema della permanenza del segno, si avrebbe che $\exists \mu > 0$ tale che $x_0 < x < x_0 + \mu$ implica $f(x) < 0$. Dunque $(x_0, x_0 + \mu) \subset S$, contro il fatto che $x_0 = \sup S$. $\square$

Dalla dimostrazione data, si può facilmente dedurre la seguente proposizione.

Proposizione 23 *Sia* $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione continua in* (a, b)*; supponiamo che esistano i seguenti limiti:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lambda_1, \quad \lim_{x \to b} f(x) = \lambda_2;$$

se risulta $\lambda_1 \lambda_2 < 0$*, allora esiste* $x_0 \in (a, b)$ *per cui* $f(x_0) = 0$*.*

Questa proposizione permette di provare subito il seguente corollario.

Corollario 3 *Sia data la funzione*

$$f(x) = a_{2n+1} x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} + \ldots + a_0$$

con a_i *numeri reali e* $a_{2n+1} \neq 0$*; allora esiste almeno un numero reale* x_0 *soluzione dell'equazione* $f(x) = 0$*.*

Il precedente corollario può essere riformulato nella seguente maniera: ogni polinomio a coefficienti reali e di grado dispari ammette almeno una radice reale.

Una semplice ma interessante applicazione del teorema di esistenza degli zeri è il seguente teorema.

Teorema 28 (del punto unito) *Sia* $f : [a, b] \to [a, b]$ *una funzione continua; allora esiste* $x_0 \in [a, b]$ *per cui* $f(x_0) = x_0$*.*

> DIM:
> Consideriamo la funzione continua definita da $g(x) = f(x) - x$. Risultando $g(a) = f(a) - a \geq 0$ e $g(b) = f(b) - b \leq 0$, possiamo concludere che esiste $x_0 \in [a, b]$ per cui $g(x_0) = 0$. $\square$

Osserviamo esplicitamente che il teorema ora dimostrato garantisce, esplicitamente, la esistenza di un punto unito almeno per f, ma non fornisce alcun procedimento per la determinazione di uno di tali punti. Il teorema seguente (che può essere riformulato e dimostrato in ambienti molto più generali di quelli da noi usati) permette di conseguire ancora la esistenza di un punto unito per particolari funzioni assicurandoci nel contempo sia l'unicità di tale punto che un procedimento di approssimazione dello stesso.

Teorema 29 (delle Contrazioni) *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione verificante la seguente condizione:*

$$\exists \alpha \in [0, 1[\text{ per cui } |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{9.1}$$

Allora esiste un unico $x_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $f(x_0) = x_0$*. Inoltre si ha che, per ogni fissato* $z \in \mathbb{R}$*, considerata la successione*

$$z_1 = z, \quad z_{n+1} = f(z_n),$$

essa converge a x_0*.*

(Una funzione verificante (9.1) si dice **contrazione**).

DIM:
Unicità. Supponiamo che esistano due elementi distinti x ed y di $\mathbb{R}$ per cui si abbia $f(x) = x$ e $f(y) = y$. Siccome vale (9.1) si ottiene:

$$0 < |x - y| = |f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|;$$

da ciò si deduce che $\alpha \geq 1$, contro l'ipotesi su α.

Esistenza. Sia $z \in \mathbb{R}$ e poniamo

$$z_1 = f(z),$$

$$z_{n+1} = f(z_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Siccome la funzione f è lipschitziana e pertanto continua, si può osservare che se la successione (z_n) è convergente, per esempio ad x_0, si ha

$$x_o = \lim z_{n+1} = \lim f(z_n) = f(x_0).$$

Dunque basterà provare che la successione (z_n) è convergente in $\mathbb{R}$, ed essendo $\mathbb{R}$ completo sarà sufficiente provare che è di Cauchy. Considerando $n, p \in \mathbb{N}$, risulta:

$$|z_{n+p} - z_n| \leq |z_{n+1} - z_n| + \ldots + |z_{n+p-1} - z_{n+p}|.$$

È facile provare per induzione che

$$|z_{i+1} - z_i| \leq \alpha^i |z_1 - z|, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} |z_{n+p} - z_n| &\leq |z_1 - z|(\alpha^n + \alpha^{n+1} + \ldots + \alpha^{n+p-1}) \\ &= |z_1 - z|(s_{n+p-1} - s_{n-1}), \end{aligned}$$

dove (s_n) è la successione delle somme parziali della serie geometrica di ragione α; siccome quest'ultima serie converge allora la successione (z_n) è di Cauchy al pari della successione (s_n), in virtù della precedente disuguaglianza. $\square$

Ritornando al teorema di esistenza degli zeri importante è la seguente conseguenza.

Teorema 30 (dei valori intermedi) *Sia* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *verificante le seguenti condizioni:*

- f *continua in* X*;*
- X *intervallo.*

Allora $f(X)$ è intervallo.

(N.B. X può essere limitato oppure no).

Dim:
Basterà provare che per ogni $y_1, y_2 \in f(X)$ risulta che

$$y_1 < y < y_2 \Rightarrow \exists x \in X \text{ per cui } y = f(x).$$

Fissiamo pertanto y_1 ed y_2 elementi di $f(X)$ e supponiamo che sia $y_1 < y_2$. Osserviamo che esistono x_1 ed x_2 elementi di X per cui si ha $f(x_i) = y_i$ per $i = 1, 2$; supponiamo che si abbia $x_1 < x_2$. Siccome X è un intervallo risulta $[x_1, x_2] \subset X$. Sia poi $y_0 \in \mathbb{R}$ per cui $y_1 < y_0 < y_2$. Consideriamo la funzione g definita nell'intervallo $[x_1, x_2]$ da $g(x) = f(x) - y_0$. La funzione g è continua in $[x_1, x_2]$ e verifica la condizione $g(x_1)g(x_2) < 0$; pertanto ammetterà uno zero, cioè esisterà un elemento di $[x_1, x_2]$, sia x_0, per cui $g(x_0) = 0$. Da ciò la tesi. $\square$

Importante è, inoltre, il seguente teorema.

Teorema 31 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni:*

- *X compatto;*
- *f continua in X.*

Allora $f(X)$ è compatto.

Dim:
Sia (y_n) una successione di elementi di $f(X)$. Possiamo considerare una successione di elementi di X, sia (x_n), per cui si abbia $y_n = f(x_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siccome X è compatto, esisterà una estratta dalla successione (x_n) convergente ad un punto $x_0 \in X$. Indichiamo con (x'_n) tale estratta; siccome f è continua, si avrà che

$$\lim f(x'_n) = f(x_0) \in f(X).$$

Pertanto la successione estratta da (y_n) definita da $y'_n = f(x'_n)$ è convergente in $f(X)$. $\square$

Una importante conseguenza del precedente teorema è il seguente corollario.

Corollario 4 (Teorema di Weierstrass) *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni:*

- *f continua in X;*
- *X compatto.*

Allora f ammette massimo e minimo.

La dimostrazione segue banalmente dal teorema precedente e dal fatto che i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}$ sono i sottoinsiemi chiusi e limitati e pertanto essi hanno massimo e minimo; pertanto $\exists \max f(X)$ ed $\exists \min f(X)$.

Possiamo concludere con la seguente proposizione.

Proposizione 24 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f([a, b])$ è un intervallo chiuso e limitato.*

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Osservazioni.

- I teoremi precedenti relativi alla esistenza del massimo e del minimo per una funzione continua non danno alcuna possibilità per una determinazione concreta dei punti di massimo/minimo.
- L'ipotesi di continuità nei suddetti teoremi assieme alla ipotesi di compattezza assicura, contemporaneamente, l'esistenza del massimo e del minimo per la funzione f. Si può indebolire la ipotesi di continuità per f in modo da assicurare la sola esistenza del massimo o del minimo? Per affermare ciò occorrono le seguenti definizioni.

Definizione 16 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in X$;*

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{I(x_0)} \inf_{x \in I(x_0) \cap X} f(y);$$

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) = \inf_{I(x_0)} \sup_{x \in I(x_0) \cap X} f(y).$$

Diremo che f è semicontinua inferiormente (s.c.i.) in x_0 se e solo se

$$f(x_0) = \liminf_{x \to x_0} f(x);$$

f è semicontinua superiormente (s.c.s.) in x_0 se e solo se

$$f(x_0) = \limsup_{x \to x_0} f(x).$$

Non è difficile rendersi conto che risulta: f s.c.i. se e solo se

1. $\forall (x_n)$ con $x_n \in X$: $x_n \to x_0$, allora
$$f(x_0) \leq \liminf f(x_n);$$
2. $\exists (x_n)$ con $x_n \in X$ e per cui: $x_n \to x_0$ e
$$f(x_0) = \lim f(x_n).$$

Inoltre f è continua in x_0 se e solo se f s.c.i. e s.c.s. in x_0.

È facile il seguente teorema.

Teorema 32 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni:*

- *f s.c.i. in X (s.c.s. in X);*
- *X compatto.*

Allora f ammette minimo (massimo).

Dim:
Diciamo $e_1 = \inf f(X)$; esisterà una successione di elementi di $f(X)$, sia (y_n), avente limite proprio e_1. Ne segue la esistenza di una successione di elementi di X, sia (x_n), per cui $y_n = f(x_n)$. Pertanto essendo X compatto, esisterà una successione estratta da (x_n), sia (x'_n), convergente ad un elemento x_0 di X. Allora, per la semicontinuità inferiore di f, si ha

$$f(x_0) \leq \liminf f(x'_n) = \liminf y'_n = \lim y_n = e_1;$$

ne segue che $e_1 = f(x_0)$. □

9.4 Alcune proposizioni sulle funzioni uniformemente continue

.

Ci proponiamo di dare alcune proposizioni sulle funzioni uniformemente continue. Alcune di esse saranno utilizzate nel seguito.

Proposizione 25 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni:*

- *f uniformemente continua in X;*
- *X limitato.*

Allora f è limitata.

Dim:
Fissiamo $\varepsilon = 1$, ed un $\delta > 0$ corrispondente nella definizione di uniforme continuità. Possiamo suddividere l'insieme X, che è limitato, in un numero finito di parti X_i ognuna delle quali contenuta in un intervallo di ampiezza minore di δ. In ognuno di queste parti fissiamo un elemento $x_i \in X_i$ e poniamo

$$M = \sum_i |f(x_i)|.$$

Fissato $x \in X$, esso apparterrà ad un X_i, pertanto

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| \leq 1 + M.$$

Quindi la tesi. □

Il precedente teorema assicura esempi di funzioni continue non uniformemente continue (dare un esempio concreto).

Proposizione 26 (Teorema di Heine-Cantor) *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni:*

- *f continua in X;*
- *X compatto.*

Allora f è uniformemente continua in X.

DIM:
Supponiamo che f non sia uniformemente continua; ne segue che è vero quanto segue: $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$, esistono $x_n, y_n \in X$ verificanti le condizioni

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \tag{9.2}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{9.3}$$

La successione (x_n) ammette una estratta convergente ad un punto di X; sia (x'_n) tale estratta ed $x_0 \in X$ il suo limite. Per (9.2) anche la estratta (y'_n) convergerà al punto x_0. Siccome f è continua ne segue che $f(x_0)$ è il limite comune delle successioni $(f(x'_n))$ ed $(f(y'_n))$, contro la (9.3). $\square$

Proposizione 27 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni:*

- *f continua in $\mathbb{R}$;*
- *f ammette limite finito per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.*

Allora f è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

Assegnato un insieme numerico limitato X diciamo π suddivisione di X ogni scelta di un numero finito di elementi del tipo $\pi = \{x_0 < x_1 < ... < x_m\}$ per cui :$X \subseteq [x_0, x_m]$; il numero $\delta = max_{i=1,2,...m}|x_{i+1} - x_i|$ si dice parametro di finezza di π. Se $X = [a, b]$ si prende, generalmente: $a = x_0$ e $b = x_m$.

Proposizione 28 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni:*

- *f uniformemente continua in X;*
- *X compatto.*

Allora risulta: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che per ogni suddivisione di X in sottoinsiemi X_i di ampiezza minore di δ, si ha

$$\sup f(X_i) - \inf f(X_i) \leq \varepsilon.$$

Dim:
Intanto osserviamo che f è limitata. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo il $\delta > 0$ della definizione di uniforme continuità. Scelta una qualsiasi suddivisione di X come nell'enunciato si ha; $\forall x, y \in X_i$: $-\varepsilon \leq f(x) - f(y) \leq \varepsilon$. Da questa disuguaglianza segue subito la tesi. □

Vale, infine, il seguente teorema.

Teorema 33 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni:*

- *f continua in X;*
- *X compatto;*
- *f ammette inversa.*

Allora f^{-1} è continua.

Dim:
Sia y_0 elemento di $f(X)$ ed (y_n) una successione di elementi di $f(X)$ convergente a y_0. Consideriamo ora la successione (x_n) di elementi di X per cui $y_n = f(x_n)$. Siccome X è compatto si ha che la successione (x_n) ammette una estratta convergente ad un elemento x_0 di X. Detta (x'_n) tale estratta si ottiene che la successione estratta (y'_n) converge, essendo f continua, ad $f(x_0)$; pertanto avendosi $y_0 = f(x_0)$ si ha $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Affermiamo che deve essere $\lim x_n = x_0$. Difatti se una estratta di (x_n) convergesse ad $x_1 \neq x_0$, si avrebbe: $f(x_0) = f(x_1) = y_0$ contro il fatto che f è iniettiva. □

9.5 Continuità e monotonia

I teoremi di questo capitolo riguardano il rapporto tra i concetti di continuità e di monotonia, in particolare si proveranno teoremi che assicurano la invertibilità di funzioni continue.

Premettiamo alcuni lemma.

Lemma 1 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; se f è monotona in X ed ammette inversa allora la funzione f e la sua inversa f^{-1} sono strettamente monotone dello stesso tipo.*

Dim:
Supponiamo f crescente in X; e siano anche x_1 ed x_2 di X per cui si abbia $x_1 < x_2$ ed $f(x_1) = f(x_2)$; allora f non potrebbe essere invertibile in quanto non iniettiva (analogo discorso se f è decrescente); pertanto f è strettamente crescente. Considerati ora y_1 ed y_2 di $f(X)$ per cui $y_1 < y_2$, siano x_1 ed x_2 gli elementi di X per cui $f(x_1) = y_1$ ed $f(x_2) = y_2$. Se fosse $x_1 \geq x_2$ si otterrebbe $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$; pertanto anche f^{-1} è strettamente crescente. □

Lemma 2 *Se f è strettamente monotona in X allora ammette inversa.*

DIM:
Ovvia. □

Il teorema seguente assicura la stretta monotonia, su un intervallo X di una funzione continua invertibile in X.

Teorema 34 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni:*

- *f continua in X;*
- *X intervallo;*
- *f ammette inversa.*

Allora f è strettamente monotona.

DIM:
Siccome per ogni coppia x_1 ed x_2 di elementi di X per cui si abbia $x_1 < x_2$ deve essere $f(x_1) \neq f(x_2)$ (f è invertibile), possiamo supporre (senza ledere la generalità) per una siffatta coppia si abbia $f(x_1) < f(x_2)$. Affermiamo che:

1. $x \in X$, $x > x_1$ allora $f(x) > f(x_1)$;
2. $x \in X$, $x < x_2$ allora $f(x) < f(x_2)$.

(le due condizioni assicurano che, fissato x_0, la funzione, della varibile x, $f(x) - f(x_0)$ ha segno costante a destra, a sinistra rispettivamente, di x_0).

- Supponiamo che esista $x_0 > x_1$ per cui $f(x_0) < f(x_1)$; considerato l'intervallo di estremi x_0 e x_1, essendo anche $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$, dovrà esistere in esso un punto x_3 per cui $f(x_3) = f(x_1)$ (teorema dei valori intermedi). Ciò è falso siccome f è invertibile.
- Analoga dimostrazione per la 2..

Siamo ora in grado di provare che $a < b$ implica $f(a) < f(b)$. Poniamo

$$b_1 = \max\{b, x_2\}.$$

Allora se $x > x_1$ risulta $f(x) > f(x_1)$ e dunque $f(x_1) < f(b_1)$. D'altra parte se $x < b_1$ sarà $f(x) < f(b_1)$. Ne segue che $f(a) < f(b_1)$; da ciò , sempre per quanto già provato, segue che $f(a) < f(b)$.
□

Il seguente teorema è in un certo senso il teorema inverso del precedente.

Teorema 35 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione verificante le condizioni:*

- *f monotona;*
- *X intervallo;*
- *$f(X)$ intervallo.*

Allora f è continua in X.

Dim:
Supponiamo per semplicità che f sia crescente e che esista un punto x_0 di X in cui f non sia continua; limitiamoci anche al caso che x_0 non sia un estremo di X. Per il teorema fondamentale sui limiti delle funzioni monotone si ha

$$\lambda_1 \leq f(x_0) \leq \lambda_2$$

dove

$$\lambda_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) < \lambda_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

(la disuguaglianza è stretta perchè abbiamo supposto f non continua in x_0). Sia y_0 elemento di $\mathbb{R}$ per cui $\lambda_1 < y_0 < \lambda_2$ ed $f(x_0) \neq y_0$. È facile verificare che y_0 è punto di un sottointervallo di $f(X)$ e siccome quest'ultimo è intervallo deve appartenere ad $f(X)$. D'altra parte

$$x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq \lambda_1,$$
$$x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq \lambda_2,$$
$$x = x_0 \Rightarrow f(x_0) \neq y_0.$$

Dunque un assurdo. E ciò conclude il teorema. Se x_0 è un estremo, la dimostrazione si può agevolmente riadattare. □

Corollario 5 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificante le condizioni:*

- *X intervallo;*
- *$f(X)$ intervallo;*
- *f strettamente monotona.*

Allora f ed f^{-1} sono continue.

Dim:
Basta osservare che sia f che f^{-1} verificano le ipotesi del teorema precedente. □

Capitolo 10

La derivazione per funzioni reali di variabile reale

Il teorema di Weiestrass, in un suo corollario, assicura la esistenza di punti di massimo e di minimo per una funzione continua su un intervallo [a,b]; tale teorema non da un procedimento per determinare tali punti. A questo problema ed ad altri si puó dare una risposta, in un contesto generale, introducendo il concetto di funzione derivabile. Sebbene la definizione si possa dare per funzioni definite in insiemi generali, noi tratteremo sempre funzioni reali definite su intervalli (anche non limitati).

10.1 Funzioni derivabili

.

Sia assegnata una funzione $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto per cui si abbia $a < x_0 < b$. Ha significato considerare la seguente funzione (che si dice *funzione rapporto incrementale della f nel punto* x_0):

$$R_{(f,x_0)}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \forall x \neq x_0 \quad x \in (a, b).$$

La precedente funzione ha un evidente significato geometrico e fisico. Dal punto di vista geometrico rappresenta il coefficente angolare della retta passante per i punti del grafico $(x, f(x))$ e $(x_0 f(x_0))$, mentre dal punto di vista fisico puó essere interpretata come la velocitá media.

Definizione 17 *f derivabile in* $x_0 \Longleftrightarrow \exists lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}$;

f ha derivata infinita in $x_0 \Longleftrightarrow \exists lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty(-\infty)$.

Se f é derivabile in x_0 il limite del rapporto incrementale si dice *derivata* di f in x_0 e si indica in uno di questi modi:

$$f'(x_0); \quad Df(x_0); \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

La retta $y = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ si dice retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0; il motivo di questa definizione consiste nella seguente osservazione.

f derivabile in x_0 se e solo se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

se e solo se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))}{x-x_0} = 0.$$

Pertanto la retta tangente é la migliore retta che approssima il grafico della funzione nel punto di ascissa x_0.

Naturalmente potremmo considerare nella definizione di funzione derivabile solo il limite da dx o solo quello da sin; in questo caso parleremo di derivata dx o derivata sin ed useremo le notazioni $f'_+(x_0), \quad f'_-(x_0)$. In questo caso parliamo di semirette tangenti.

Il legame tra le funzioni continue e le funzioni derivabili é espresso dal seguente teorema

Teorema 36 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in]a, b[$, allora f é continua in x_0.*

DIM:
Osserviamo che provare la tesi equivale a provare che risulta:

$$\lim_{x\to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

Pertanto siccome possiamo scrivere:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) \quad \forall x \neq x_0;$$

ricordando che il limite del prodotto di due funzioni é il prodotto dei limiti se esso non si presenta in forma indeterminata, si deduce subito la tesi. □

Esercizio 9 *Cosa si puó dire se la funzione é derivabile a ds e/o sin ?*
Ci sono funzioni continue che non siano derivabili ?

In generale si dice che *una funzione é derivabile nell'insieme X* se essa é derivabile in tutti i punti interni dell'insieme. In questo caso si puó parlare di funzione derivata della funzione f ponendo:

$$f' : X \to \mathbb{R} \qquad x \in X \to f'(x).$$

L'algebra della derivazione é contenuta nella seguente proposizione.

Proposizione 29 *Siano f e g due funzioni definite in (a, b), sia $a < x_0 < b$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- *Se f e g sono derivabili in x_0 allora $f \pm g$ e λf sono derivabili in x_0 e si ha*
$$(f \pm g)'(x_0) = (f')(x_0) \pm (g')(x_0); (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$
- *Se f e g sono derivabili in x_0 allora fg é derivabile in x_0 e si ha:*
$$(fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
- *Se f e g sono derivabili in x_0 e si ha che $g \neq 0$ in un intorno di x_0 allora $\frac{f}{g}$ é derivabile in x_0 e si ha:*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

La dimostrazione della proposizione precedente é una semplice conseguenza dei risultati sulle operazioni con i limiti e del fatto che le funzioni derivabili sono continue.

Per quanto riguarda le funzioni composte sussiste il seguente risultato.

Proposizione 30 *Siano f e g due funzioni definite in A, B, rispettivamente, e per cui abbia significato la loro composizione $f(g)$; sia f derivabile in x_0 e g sia derivabile in $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione $f(g)$ é derivabile in x_0 e si ha:*
$$(f(g))'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dim:
Osserviamo subito che se, in un intorno di x_0, risulta $f(x) \neq f(x_0)$ per $x \neq x_0$, allora si ha subito la tesi, essendo:
$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In generale procediamo cosìĊonsideriamo la funzione w definita in questo modo
$$w(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g(f(x_0))' & \text{se } y = f(x_0); \end{cases}$$

tale funzione è continua in $y_0 = f(x_0)$ (poichè g è ivi derivabile); inoltre si ha, per $x \neq x_0$:
$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = w(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Da questa uguaglianza la tesi. □

Il seguente teorema è fondamentale per la determinazione della derivata di numerose funzioni.

Teorema 37 (Derivazione della funzione inversa) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed invertibile. Supponiamo che f sia derivabile nel punto x_0 e che si abbia $f(x_0)' \neq 0$; allora la funzione inversa di f è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e si ha*

$$(Df^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dim:
Osserviamo che f^{-1} è continua; consideriamo poi la seguente funzione;

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} & \text{se } x \neq x_0 \\ \frac{1}{f'(x_0)} & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

Tale funzione è continua in x_0. Siccome si ha:

$$g(f^{-1}(y)) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}, \quad \text{per } y \neq y_0,$$

dalla continuità di g e di f^{-1} si deduce la tesi passando al limite per $y \to y_0$. □

Capitolo 11

Alcune proprietà delle funzioni derivabili

11.1 Monotonia locale e derivazione

Come abbiamo già detto, in base alla definizione di funzione derivabile in un punto, sembra debba esserci una qualche relazione tra il segno della derivata prima e la monotonia della funzione. Per mettere in chiaro tali relazioni premettiamo qualche definizione.

Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con X aperto e fissiamo $x_0 \in X$.

Definizione 18 *f crescente in x_0 se e solo se esiste $I(x_0)$ tale che per ogni $x \in I(x_0) \cap X$:*

$$\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) \\ x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0); \end{cases}$$

quindi se e solo se esiste $I(x_0)$ tale che per ogni $x \in I(x_0) \cap X$, $x \neq x_0$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

È facile, alla luce della precedente definizione, dare la definizione di f strettamente crescente in x_0, f decrescente in x_0 e di f strettamente decrescente in x_0. Si vede subito che vale la seguente osservazione.

Se f è crescente in X (aperto) allora f è crescente in ogni punto di X.

In generale non vale il viceversa; sussiste però il seguente teorema.

Teorema 38 *Sia $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per cui;*

1. *$\forall x \in X$ f è crescente in X;*

2. *X intervallo,*

allora f è crescente in X.

> Dim:
> Fissiamo $x_1, x_2 \in X$ e supponiamo che sia $x_1 < x_2$; ci proponiamo di provare che è $f(x_1) \leq f(x_2)$. Osserviamo subito che l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2 è tutto contenuto in X. Considerato l'insieme $S = \{x \in [x_1, x_2]; f(x_1) \leq f(x)\}$, si ha che S è non vuoto (per l'ipotesi 1.) e limitato. Pertanto S ammette estremo superiore, diciamolo e, verificante la condizione: $x_1 < e \leq x_2$. Si ha che
>
> **a)** $e \in S$;
>
> **b)** $e = x_2$.
>
> La a) discende facilmente dalla ipotesi 1.. Difatti per un opportuno $\delta > 0$ si ha che $(e - \delta < x \leq e \Rightarrow f(x) \leq f(e))$. D'altra parte deve esistere, per la seconda proprietà dell'estremo superiore, un elemento di S nell'intervallo $]e - \delta, e]$; da ciò si deduce che $e \in S$. Per provare la b), supponiamo che sia $e < x_2$. Allora per un opportuno $\delta > 0$ si ha che; $e + \delta < x_2$ ed anche $(e_x < e\delta \Rightarrow f(e) \leq f(x))$. Pertanto e non può essere l'estremo superiore di S. Da quanto provato segue la tesi. □

Una prima relazione tra monotonia e derivazione è data dalla seguente proposizione.

Proposizione 31 *Sia f crescente in x_0 ed ivi derivabile, allora risulta $f'(x_0) \geq 0$.*

La dimostrazione è una ovvia conseguenza delle definizioni. Sussistono altresì le proposizioni seguenti.

Proposizione 32 *Sia f derivabile in x_0 e si abbia $f'(x_0) > 0$, allora f è strettamente crescente in x_0.*

Proposizione 33 *Sia f definita su un intervallo aperto X e in ogni punto sia derivabile con derivata strettamente positiva, allora f è strettamente crescente in X.*

Le dimostrazioni di queste proposizioni sono semplici conseguenze di quanto provato precedentemente.

Punti di massimo/minimo locale e condizione necessaria . Per poter procedere nella teoria dobbiamo richiamare le nozioni di punto di massimo o di minimo locale. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in X$.

Definizione 19 *x_0 punto di massimo locale per f in X se e solo se esiste $I(x_0)$ tale che:*

$$(x \in X \cap I(x_0) \Rightarrow f(x) \leq f(x_0));$$

x_0 punto di minimo locale per f in X se e solo se esiste $I(x_0)$ tale che:

$$(x \in X \cap I(x_0) \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)).$$

Se le disuguaglianze, nelle precedenti definizioni, sono strette, per $x \neq x_0$, allora parleremo di massimo locale **proprio** o di minimo locale **proprio**.

Il seguente teorema da' una prima importante relazione tra massimi/minimi e derivabilità.

Teorema 39 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}$ per cui*

1. *$a < x_0 < b$ (cioè x_0 interno all'intervallo di definizione della funzione);*
2. *f derivabile in x_0;*
3. *x_0 punto di massimo o di minimo locale per f;*

allora risulta $f'(x_0) = 0$.

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema osserviamo;

1. se x_0 fosse un estremo dell'intervallo potremmo considerare come controesempio al teorema una funzione affine non costante (una retta) definita su un intervallo; tale funzione ha derivata costante e differente da zero.
2. Può succedere che in un punto di massimo o di minimo interno la funzione non sia derivabile come per esempio la funzione valore assoluto nell'intervallo di estremi -1 e $+1$.

   Dim:
   Supponiamo che $f'(x_0) > 0$; per la Proposiozione 32, f è strettamente crescente in x_0, dunque x_0 (essendo punto interno), non può essere ne' di massimo ne' di minimo per f. In maniera analoga si prova che non può essere $f'(x_0) < 0$. □

Il teorema precedente da' alcune indicazioni circa la ricerca dei punti di massimo o di minimo locali che siano interni all'insieme di definizione di una funzione derivabile; occorre ricercarli tra le soluzioni della equazione $f'(x) = 0$.

11.2 Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy ed alcune conseguenze

I seguenti teoremi, tra di loro equivalenti, sono utili per stabilire importanti proprietà delle funzioni derivabili. Osserviamo che le proprietà qualitative delle funzioni che vi intervengono sono in tutti e tre i teoremi le stesse.

Teorema 40 (Rolle) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni;*

1. *f continua in $[a, b]$;*

2. *f derivabile in* $]a,b[$;

3. $f(a) = f(b)$.

Allora: $\exists c \in]a,b[$ *tale che* $f'(c) = 0$.

Prima di passare alla dimostrazione del teorema osserviamo che l'ipotesi 3. è essenziale (basta considerare una funzione affine non costante su un intervallo); l'ipotesi 2. è anch'essa esseziale (basta considerare la funzione valore assoluto in $[-1, 1]$); d'altra parte è anche essenziale la ipotesi 1. (si consideri una funzione affine non costante su un intervallo e la si modifichi in un estremo ponendo ivi come valore il valore assunto nell'altro estremo).

Dim:
Per il teorema di Weierstrass, la funzione ammette punti di massimo e di minimo; siano x_1 e x_2 punti di $[a,b]$ tali che si abbia: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ per ogni $x \in [a,b]$. Se $x_1 = x_2$, la funzione è costante e quindi ha derivata nulla in ogni punto. Se x_1 ed x_2 coincidono con gli estremi dell'intervallo, per l'ipotesi 3. la funzione è costante e quindi ha derivata nulla in ogni punto. Se, infine, uno almeno dei due punti è interno all'intervallo, per il teorema precedentemente provato si ha la tesi. □

Il teorema di Rolle ha un interessante interpretazione geometrica. Nelle ipotesi del teorema di Rolle, il grafico della funzione ammette in un suo punto retta tangente parallela all'asse delle x.

Teorema 41 (Lagrange) *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *verificante le seguenti condizioni:*

1. *f continua in* $[a,b]$;

2. *f derivabile in* $]a,b[$.

Allora $\exists x \in]a,b[$ *tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dim:
La funzione $h(x) = x(f(b) - f(a)) - f(x)(b - a)$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle. Pertanto esiste un punto c per cui $h'(c) = 0$. Da ciò la tesi. □

Si può dare una interpretazione geometrica di tale teorema osservando che nelle ipotesi del teorema di Lagrange deve esistere un punto del grafico di f in cui la retta tangente è parallela alla congiungente i punto del piano $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

La tesi di questo teorema si può scirvere anche in questa maniera;

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a);$$

per tale motivo il teorema si dice anche degli incrementi finiti, volendo così evidenziare come l'incremento di f sia controllato dall'incremento della variabile e dall'andamento della derivata. Spesso applicheremo il teorema di Lagrange a sottointervalli dell'insieme di definizione; in queste situazioni potrà essere utile osservare che il punto c dipende dagli estremi dell'intervallo scelto.

Teorema 42 (Cauchy) *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificanti le seguenti condizioni;*

1. *f e g continue in $[a, b]$;*
2. *f e g derivabili in $]a, b[$;*
3. *$\forall x \in]a, b[\ g'(x) \neq 0$;*
4. *$g(b) \neq g(a)$.*

Allora $\exists c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dim:
La funzione $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$ verifica le ipotesi del teorema di Rolle; tenendo conto delle ipotesi 3. e 4. segue facilmente la tesi. □

Corollario 6 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni;*

1. *f continua in $[a, b]$;*
2. *f derivabile in $]a, b[$;*
3. *$\exists M > 0$ per cui $|f'(x)| \leq M$ per ogni $x \in]a, b[$.*

Allora f è Lipschitziana in $[a, b]$.

Dim:
Siano x_1 ed x_2 due elementi di $[a, b]$ e supponiamo che $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange applicato alla funzione f ristretta all'intervallo di estremi x_1 e x_2, si ha che esiste un c (dipendente da x_1 ed x_2) per cui

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \tag{11.1}$$

Da (11.1) segue subito, per la 3., che per ogni coppia x_1, x_2:

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)| \cdot |x_2 - x_1| \leq M|x_2 - x_1|.$$

□

La dimostrazione precedente e in particolar modo la (11.1) permettono di dimostrare il seguente

Corollario 7 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni:*

1. *f continua in $[a, b]$;*
2. *f derivabile in $]a, b[$;*
3. *$f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$.*

Allora f è costante.

Osserviamo esplicitamente che per la dimostrazione di questo teorema è essenziale che f sia considerata su un intervallo. La dimostrazione del corollario segue sempre da (11.1).

Corollario 8 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante le seguenti condizioni:*

1. *f continua in $[a, b]$;*
2. *f derivabile in $]a, b[$;*
3. *$f'(x) > 0$ per ogni $x \in]a, b[$.*

Allora f è strettamente crescente.

A commento del Corollario 8 possiamo osservare che ci sono delle funzioni definite su intervalli che sono strettamente monotone senza che la loro funzione derivata sia strettamente positiva (si pensi alla funzione $f(x) = x^3$ in un intervallo centrato nell'origine). Una completa caratterizzazione delle funzioni derivabili strettamente monotone è contenuta nel seguente teorema.

Teorema 43 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ che sia derivabile in $]a, b[$; f strettamente crescente in $]a, b[$ se e solo se*

a) *$f'(x) \geq 0$ in $]a, b[$;*

b) *non esiste un sottointervallo in cui f' è identicamente nulla.*

DIM:

$\Rightarrow$) Se f è strettamente crescente in $]a, b[$, allora è ivi crescente; pertanto, essendo derivabile, dovrà essere in ogni punto $f'(x) \geq 0$. D'altra parte se in un sottointervallo fosse la derivata identicamente nulla, avremmo, per il Corollario 7, f costante su tale sottointervallo contro il fatto che f è strettamente crescente.

$\Leftarrow$) Per a), in virtù del Corollario 8, f è crescente in $]a, b[$. Supponendo che non sia strettamente crescente, si avrebbe che per una certa coppia di punti si avrebbe: $x_1 < x_2$ ed $f(x_1) = f(x_2)$. Pertanto nel sottointervallo di estremi x_1 e x_2 f sarebbe costante e dunque con derivata nulla, contro la ipotesi b).

□

Diamo ora un primo teorema sufficiente per la determinazione di punti di massimo o di minimo.

Teorema 44 *Siano* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ed* x_0 *verificanti le seguenti condizioni:*

1. f *continua in* $[a, b]$*,* $a < x_0 < b$*;*
2. f *derivabile in* $]a, b[\setminus\{x_0\}$*;*
3. *per ogni* $x \in]a, b[$*,*
$$\begin{cases} x < x_0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \\ x > x_0 \Rightarrow f'(x) \geq 0. \end{cases}$$

Allora x_0 *è un punto di minimo (assoluto) per* f*.*

Osserviamo esplicitamente che nel teorema non si richiede la derivabilità nel punto x_0 mentre si richiede (ed è essenziale) la continuità della funzione nel punto. La dimostrazione del teorema è semplice osservando che f è descrescente nell'intervallo $(a, x_0]$ ed è crescente nell'intervallo $[x_0, b)$.

Capitolo 12

La derivata e il concetto di differenziale

Per poter parlare di differenziale di una funzione occorre considerare un particolare tipo di trasformazioni. Supponiamo di avere una funzione $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che L è una funzione lineare se essa verifica le seguenti condizioni:

$$L(\lambda x) = \lambda L(x), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$L(x+y) = L(x) + L(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(Osserviamo, per inciso, che l'operatore integrazione e l'operatore derivazione verificano proprietà formalmente analoghe a queste).

La definizione di funzione derivabile in un punto può essere data utilizzando le funzioni lineari.

Sia data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ed x_0 punto interno ad (a,b); supponiamo che f sia derivabile in x_0. Sussiste la seguente equivalenza:

f derivabile in x_0 se e solo se esiste $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineare tale che si abbia

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

La implicazione $\Rightarrow$) è ovvia basta prendere la funzione lineare $L(h) = f'(x_0)h$; la dimostrazione della implicazione $\Leftarrow$) è un po' più elaborata ma non difficile.

In definitiva sarà $L(h) = f'(x_0)h$; questa funzione si dice differenziale della f in x_0 e si indica con il simbolo df_{x_0}; pertanto

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0)h, \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Questa definizione permette di scrivere la derivata di f nel punto x_0 come rapporto di due funzioni. Per fare ciò occorre notare che il differenziale della funzione identica (cioè della funzione $i(x) = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$) verifica la condizione $di_x(h) = h$. Siccome

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0)h, \quad \forall h \in \mathbb{R},$$

ne dediciamo che

$$df_{x_0}(h) = f'(x_0) di_{x_0}(h), \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Pertanto si ottiene:

$$\frac{df_{x_0}(h)}{di_{x_0}(h)} = f'(x_0);$$

in generale per il generico x e con la notazione $di_x(\cdot) = dx(\cdot)$, si scrive

$$\frac{df_x}{dx} = f'(x).$$

12.1 Il teorema di De l'Hôpital ed il calcolo dei limiti

Siano due funzioni continue in $[a, b]$ e sia $a \leq x_0 \leq b$. Vogliamo studiare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

quando $g(x_0) = f(x_0) = 0$ (in questo caso non possiamo utilizzare il teorema generale sulle operazioni con i limiti poichè si presenta una forma indeterminata). Vale la seguente osservazione.

Osservazione 5 *Nelle precedenti ipotesi se inoltre f e g sono derivabili nel punto x_0 con $g'(x_0) =\neq 0$, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Per dimostrare l'osservazione basta osservare che si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \frac{x - x_0}{g(x) - g(x_0)}.$$

In generale vale il seguente teorema.

Teorema 45 *Siano f e g due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[\setminus x_0$ per cui si abbia $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Supponiamo inoltre che g e g' siano diverse da zero in un intorno di x_0 (escluso x_0 stesso). Allora, se esiste*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda,$$

esiste anche

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed è uguale a λ.

Dim:
È una conseguenza del teorema di Cauchy. Difatti, sia (x_n) una successione di elementi di $[a, b]$ per cui si abbia $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \to x_0$. Per il teorema di Cauchy si ottiene

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \xi_n : \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Per la ipotesi posta si ottiene, ricordando il teorema di caratterizzazione del limite di una funzione mediante successioni di valori di essa, la tesi. □

In maniera analoga si può provare il seguente risultato.

Proposizione 34 *Siano f e g due funzioni continue e derivabili in $[a, +\infty)$; se*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$

se g e g' sono diverse da zero in un intorno di x_0 e se esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda,$$

allora esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed è uguale a λ.

Un teorema analogo a quello precedentemente provato per la forma $0/0$ sussiste per la forma ∞/∞.

Teorema 46 *Siano f e g due funzioni derivabili nell'intervallo (a, b). Supponiamo che si abbia:*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = -\infty$;
2. *g' sia differente da zero vicino ad a;*
3. *esiste il*
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda.$$

Allora esiste

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda.$$

Dim:
Supponiamo dapprima $\lambda \in \mathbb{R}$. Fissato $\epsilon > 0$, si ha che esiste un punto $x_0(\epsilon)$ per cui si abbia

$$a < \xi < x_0(\epsilon) \Rightarrow \left| \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda \right| < \epsilon.$$

Inoltre se $a < x < x_0(\epsilon)$, per il teorema di Cauchy, si ottiene: esiste ξ verificante le condizioni $a < \xi < x_0(\epsilon)$ e

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pertanto se ne deduce che:

$$a < x < x_0(\epsilon) \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} - \lambda \right| < \epsilon.$$

Dunque

$$a < x < x_0(\epsilon) \Rightarrow \lambda - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - f(x_0)/f(x)}{1 - g(x_0)/g(x)} < \lambda + \epsilon.$$

Passando al minimo limite ed al massimo limite, per l'arbitrarietà di ϵ, se ne deduce la tesi.

Con un procedimento quasi analogo si dimostra la tesi se $\lambda = +\infty$.
$\square$

Osservazione 6 *I teoremi precedenti si applicano anche alle forme indeterminate* $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 *e* 1^∞.

Per capire la precedente osservazione basta osservare che valgono le seguenti uguaglianze;

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)},$$

$$f(x) + g(x) = \frac{1/f(x) + 1/g(x)}{1/(f(x)g(x))},$$

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

In questa maniera ci si può ricondurre ai teoremi precedenti.

Osservazione 7 *I teoremi precedenti non si possono invertire; difatti ci sono esempi per cui esiste*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ma non esiste il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(si consideri la funzione $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ *e* $g(x) = x$ *con* $x_0 = 0$*).*

12.2 Derivate successive

Sia data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ e supponiamo che essa sia derivabile in (a,b); possiamo allora parlare della funzione derivata di f in (a,b): $f' : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$. La precedente funzione (derivata prima) può essere derivabile in un punto di (a,b); allora ha significato porre la seguente definizione.

Definizione 20 *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in un intorno di x_0 con $a < x_0 < b$. f derivabile due volte in x_0 se e solo se f' derivabile in x_0.*

Si pone, come notazione, $(f')'(x_0) = D^2 f(x_0) = f''(x_0)$ e tale simbolo si indica con derivata seconda di f in x_0. Occorre osservare che per poter parlare della derivata seconda di f in x_0 deve essere f derivabile in un intorno di x_0. Naturalmente se una funzione è dotata in ogni punto di (a,b) di derivata seconda, potremo partlare di funzione derivata seconda ed eventualmente di derivata terza, quarta, ecc. in un punto. È bene d'altra parte osservare che se f è dotata in x_0 di derivata n–esima allra in tutto un intorno del punto essa è dotata di derivate fino all'ordine $(n-1)$–esimo ed esse sono, in tale intorno, tutte funzioni continue (per capire ciò basta ricordare la relazione tra derivazione e continuità).

In generale poniamo la seguente definizione.

Definizione 21 *Sia $A = (a,b)$; $f \in \mathcal{C}^k(A)$ se e solo se f ha tutte le derivate fino all'ordine k in A ed esse sono tutte funzioni continue in A.*

$f \in \mathcal{C}^k(A)$ si legge dicendo f è di classe C kappa in A. È evidente che l'insieme $\mathcal{C}^k(A)$ munito delle usuali operazioni algebriche di somma e prodotto per un numero è uno spazio vettoriale (di dimensione infinita). Sussiste la seguente **Formula di Leibniz**.

Teorema 47 *Sia f e g elementi di $\mathcal{C}^k(A)$; allora anche fg è un elemento di $\mathcal{C}^k(A)$, inoltre si ha*

$$D^k(fg)(x) = \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} D^h f(x) D^{k-h} g(x).$$

DIM:
La dimostrazione si basa sul principio di induzione. È evidente che la formula è vera per $k = 1$. Supponiamo che essa sia vera per k e

dimostriamo che è vera per $k+1$.

$$\begin{aligned}
D^{k+1}(fg) &= D(D^k(fg)) = D\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}D^hfD^{k-h}g\\
&= \sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}(D^{h+1}fD^{k-h}g + D^hfD^{k-h+1}g)\\
&= \sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}D^{h+1}fD^{k-h}g +\\
&\quad +\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}D^hfD^{k-h+1}g.
\end{aligned}$$

Siccome

$$\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}D^{h+1}fD^{k-h}g = \sum_{h=1}^{k+1}\binom{k}{h-1}D^hfD^{k-h+1}g$$

si deduce che

$$\begin{aligned}
D^{k+1}fg &= \sum_{h=1}^{k+1}\binom{k}{h-1}D^hfD^{k-h+1}g +\\
&\quad +\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h}D^hfD^{k-h+1}g\\
&= gD^{k+1}f + fD^{k+1}g + \sum_{h=1}^{k}\binom{k+1}{h}D^hfD^{k-h+1}g,
\end{aligned}$$

quest'ultima espressione coincide con quanto dovevamo provare. □

12.3 Altri teoremi per la determinazione dei punti di massimo/minimo e formula di Taylor per le funzioni di classe $\mathcal{C}^k$

La introduzione delle derivate successive permette di stabilire ulteriori, più semplici, condizioni per la determinazione dei punti di massimo e/o di minimo. La più semplice condizione è formulata dal seguente teorema.

Teorema 48 *Sia f una funzione derivabile in un intervallo I e sia x_0 un punto interno di I. Supponiamo inoltre che si abbia:*

a) $f'(x_0) = 0$*;*

b) *esiste $f''(x_0)$ (cioè f abbia derivata seconda in x_0).*

Valgono allora le seguenti implicazioni:

1) $f''(x_0) < 0$ *allora* x_0 *punto di massimo relativo;*

1') $f''(x_0) > 0$ *allora* x_0 *punto di minimo relativo.*

2) x_0 *punto di massimo relativo allora* $f''(x_0) \leq 0$*;*

2') x_0 *punto di minimo relativo allora* $f''(x_0) \geq 0$.

DIM:

1) Per un teorema relativo alla monotonia si deduce dalla condizione posta che la funzione f' è strettamente decrescente in x_0. Pertanto per un opportuno intorno di x_0, sia V, si ha

$$x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0;$$

$$x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0.$$

Dunque tenendo conto di un precedente teorema si conclude la tesi. La dimostrazione di 1') è analoga.

2) Se fosse $f''(x_0) > 0$, per 1'), x_0 sarebbe un punto di minimo relativo. La 2') si prova in maniera analoga.

□

La formula di Taylor che tra poco stabiliremo per metterà una differente dimostrazione del teorema precedente (il pregio di questa nuova dimostrazione consisterà nel fatto che non utilizzeremo confronti tra x e x_0; cioè non si utilizzerà l'informazione che nel dominio della funzione è definito un ordine).

12.4 Polinomi di Taylor

Sia A un aperto di $\mathbb{R}$ (possiamo sempre pensare che sia un intervallo del tipo (a, b)) e sia $f \in \mathcal{C}^n(A)$ $(n \in \mathbb{N})$. Considerato $x_0 \in A$ possiamo porci il seguente problema;

Problema 4 *Esiste un polinomio* $P(x)$ *di grado* n*, verificante le seguenti condizioni*

$$P(x_0) = f(x_0), P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)?$$

La risposta a questo problema è affermativa ed anzi si dimostra anche l'unicità di un tale polinomio.

La dimostrazione di questa affermazione procede in questa maniera.

a) Supponiamo intanto che un siffatto polinomio esista e che sia del tipo

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n.$$

Si deduce subito che deve essere $a_0 = f(x_0)$. Considerando

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1},$$

si deduce $a_1 = f'(x_0)$; procedendo in questa maniera si ottiene che deve essere

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

b) Da a) segue subito che un polinomio che verifichi le condizioni del problema è unico. Difatti se P e P_1 verificano le condizioni poste nel problema, allora il polinomio $P - P_1$ deve verificare le stesse condizioni del problema con $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$.

Data $f \in \mathcal{C}^n(A)$ ed $x_0 \in A$ il polinomio dato da:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

si dice **polinomio di Taylor di ordine** n relativo al punto x_0. Si dice invece **resto** n**–esimo** la funzione

$$R_n(x, x_0) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i.$$

Ci proponiamo di studiare (vedi l'analogia con il concetto di derivazione) il seguente limite;

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n}.$$

Teorema 49 (Taylor) *Sia $f \in \mathcal{C}^n(A)$ ed $x_0 \in A$. Risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

La dimostrazione del teorema si basa sul seguente lemma.

Lemma 3 *Sia $F(x)$ una funzione di classe $\mathcal{C}^n$ in un intorno di x_0. Allora risulta*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

se e solo se

$$F(x_0) = F'(x_0) = \ldots = F^{(n)}(x_0) = 0.$$

Dim:

$\Leftarrow$) Applicando il teorema De l'Hôpital, si ottiene

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{F^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

$\Rightarrow$) Supponendo $F(x_0) = \ldots = F^{(j-1)}(x_0) = 0$ ed $F^{(j)}(x_0) \neq 0$, ragionando come sopra si avrebbe

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{F^{(j)}(x_0)}{j!} \neq 0.$$

D'altra parte

$$\frac{F(x)}{(x-x_0)}^{j} = \frac{F(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^{n-j},$$

passando al limite si ottiene subito una contraddizione.

$\square$

Ora per dimostrare il teorema di partenza basta osservare che il resto n–esimo verifica, per come è definito, le condizioni del precedente lemma.

La formula

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x,x_0)$$

si dice **Formula di Taylor di ordine n relativa ad x_0**; se $x_0 = 0$ tale formula si dice **Formula di Mac-Laurin**.

Può essere importante dare una rappresentazione esplicita del resto n–esimo (questo può permettere un controllo migliore di f mediante il suo polinomio di Taylor).

Teorema 50 *Sia $f \in \mathcal{C}^{n+1}$; allora esiste un punto ξ compreso nell'intervallo di estremi x e x_0 per cui si ha:*

$$R_n(x,x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Questo teorema viene enunciato senza darne una dimostrazione. Notiamo che l'espressione del resto nel Teorema 50 si dice **forma di Lagrange del resto**.

La formula di Taylor permette di dimostrare il seguente importante teorema sui punti massimo e/o di minimo.

Teorema 51 *Sia $f \in \mathcal{C}^n((a,b))$ e sia $a < x_0 < b$. Supponiamo che si abbia:*

$$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. n pari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 punto di massimo relativo;

2. n pari e $f^{(n)}(x_0) < 0$ allora x_0 punto di minimo relativo;

3. n dispari e $f^{(n)}(x_0) > 0$ allora x_0 non è ne' di massimo ne' di minimo.

DIM:
Supponiamo n pari e che sia $f^{(n)}(x_0) > 0$; per la formula di Taylor si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{(x - x_0)^n} + R_n(x, x_0);$$

dividendo per $(x - x_0)^n$ entrambi i membri si ottiene

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n}.$$

Passando al limite per $x \to x_0$, tenendo conto delle ipotesi poste, della proprietà del resto n–esimo e del teorema della permanenza del segno, esisterà un intorno di x_0 in cui vale la disuguaglianza;

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0.$$

Da ciò segue facilmente la tesi. $\square$

Capitolo 13

Funzioni convesse e concave

13.1 Convessità in un punto

Sia f una funzione continua e derivabile in un intervallo (a, b). Fissato $x_0 \in]a, b[$, esiste la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 ed essa ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Definizione 22 *Diciamo che f è convessa nel punto x_0 se si verifica che $\exists I$ intorno di x_0 tale che*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in I.$$

La definizione precedente assicura che in un intorno di x_0 "il grafico della funzione f è al di sopra del grafico della retta tangente". Naturalmente la locuzione f **strettamente convessa in** x_0 significherà che la diseguaglianza della precedente definizione è stretta per $x \neq x_0$. La definizione di **funzione concava (strettamente) in** x_0 si darà in maniera analoga.

Una delle relazioni findamentali tra convessità e derivazione è messa in evidenza dalla seguente proposizione.

Proposizione 35 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in (a, b); sia x_0 un punto di $]a, b[$. Supponiamo che esista $f''(x_0)$. Allora*

$$f''(x_0) > 0 \Longrightarrow f \text{ strettamente convessa in } x_0.$$

Dim:
Basterà provare che la funzione data da

$$g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$$

è strettamente positiva in un intorno I di x_0 (per $x \neq x_0$). Osserviamo che g è continua e derivabile; inoltre risulta; $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$ ed infine $g''(x_0) = f''(x_0) > 0$. Per un precedente teorema risulta che x_0 è un punto di minimo relativo proprio per g e questo basta per concludere la tesi. □

13.2 Convessità in un intervallo

Il concetto di funzione convessa in un intervallo che daremo tra poco è un concetto di tipo puramente algebrico e si può pensare come una generalizzazione del concetto di funzione lineare. Le funzioni convesse rappresentano, per le numerose applicazioni in vari campi dell'analisi, una classe importante di funzioni.

Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$ ed f una funzione reale definita in I.

Definizione 23 *f convessa in I se e solo se per ogni $x, y \in I$, per ogni $\lambda \in (0,1)$:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

f concava in I se e solo se $-f$ convessa in I.

Se nella precedente definizione si considera la diseguaglianza stretta si dice che f è strettamente convessa in I. Esempi di funzioni convesse in $I = \mathbb{R}$ sono date da

$$x, \quad x^2, \quad |x|, \quad e^x.$$

Altri esempi possono essere

$$f(x) = x^3, \quad \text{in } I = (0, +\infty);$$

$$f(x) = \arctan x, \quad \text{in } I = (-\infty, 0);$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad \text{in } I = (0, +\infty).$$

La convessità di una funzione in ogni punto di un intervallo I e la convessità della funzione in tutto l'intervallo non sembrano essere molto ben correlabili (come per esempio la monotonia puntuale e quella globale su un intervallo); per rendersi conto di ciò basta osservare che per poter parlare di convessità in un punto occorre che la funzione sia ivi derivabile, fatto non richiesto nella definizione di convessità su di un intervallo. Purtuttavia, sotto opportune condizioni, si potrà stabilire che la convessità in ogni punto dell'intervallo I è equivalente alla convessità in I.

La definizione di funzione convessa in I ha una ovvia interpretazione geometrica. Al variare di $\lambda \in (0,1)$, il punto $\lambda x + (1-\lambda)y$ descrive il segmento di estremi x e y, mentre il punto $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ descrive il segmento di estremi $f(x)$ ed $f(y)$. Pertanto la diseguaglianza

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

assicura che il **grafico di f nell'intervallo di estremi x e y è al di sotto del grafico della retta congiungente i punti $(x, f(x))$ ed $(y, f(y))$.** Per comprendere meglio questa affermazione poniamo

$$t = \lambda x + (1-\lambda)y$$

e, ricavata la variabile λ, sostituiamola nella formula

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

Si ottiene così che per ogni $x,y\in I$, con $x<y$ per esempio, risulta che per ogni $t\in(x,y)$:

$$f(t)\leq f(x)+\frac{f(y)-f(x)}{y-x}(t-x).$$

Una prima proposizione relativa alle funzioni convesse è la seguente.

Proposizione 36 *Sia f una funzione convessa nell'intervallo I ed x_0 un punto di I; la funzione*

$$F(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

definita in $I\setminus\{x_0\}$, è crescente.

DIM:
Consideriamo

$$\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2},$$

risulta:

$$\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)f(x_0)+(x_2-x_0)f(x_1)+(x_0-x_1)f(x_2)}{(x_1-x_2)(x_2-x_0)(x_0-x_2)}.$$

Pertanto se si ha $x_1<x_0<x_2$ risulta;

$$\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_0)-\frac{x_0-x_1}{x_1-x_2}f(x_1)-\frac{x_1-x_0}{x_1-x_2}f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_0-x_1)}\geq 0.$$

Si procede analogamente (scambiando il ruolo delle x_i) nei casi in cui $x_1<x_2<x_0$, $x_1>x_2>x_0$. □

Una importante conseguenza della proposizione è il seguente teorema.

Teorema 52 *Ogni funzione convessa (concava) in un intervallo I è continua nei punti interni di I.*

DIM:
Per la funzione F di cui alla proposizione precedente possiamo asserire che per ogni punto interno ad I la funzione F ammette limite da destra e da sinistra ed essi sono entrambi finiti (cfr. il teorema sui limiti delle funzioni monotone). Pertanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0^+}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0^-}(f(x)-f(x_0))\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)=0.\end{aligned}$$

□

Possiamo inoltre essere più precisi nella formulazione del teorema precedente provando quanto segue.

Proposizione 37 *Se f è una funzione convessa (concava) in un intervallo I allora essa è Lipschitziana in ogni sottointervallo chiuso e limitato contenuto all'interno di I.*

Dim:
Supponiamo di considerare $[a,b] \subset int(I)$. Siano x e y due elementi di tale sottointervallo e sia $c \in I$ con $b < c$. Si ottiene, per la proposizione precedente,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq F(b) = \frac{f(b)-f(y)}{b-y} \\ &= \frac{f(y)-f(b)}{y-b} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}. \end{aligned}$$

Con analogo procedimento si prova che esiste $d \in I$ tale che $d < a$ per cui

$$\frac{f(d)-f(a)}{d-a} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = F(x).$$

Da ciò segue subito la tesi. □

La precedente affermazione assicura una certa "regolarità" delle funzioni convesse. Una caratterizzazione delle funzioni "regolari" convesse è data dal seguente teorema il quale assicura che la convessità per le funzioni derivabili equivale al fatto che il grafico di f è tutto al di sopra di ogni retta tangente al grafico di f.

Teorema 53 *Sia f una funzione derivabile in un intervallo I. f convessa in I se e solo se per ogni $x_0, x_1 \in I$*

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Dim:

$\Rightarrow$) Siano x_0 ed x_1 con $x_1 > x_0$. Risulta

$$F(x_1) \geq \lim_{x \to x_0^+} F(x) = f'(x_0).$$

Da ciò la tesi; analogamente per $x_1 < x_0$.

$\Leftarrow$) Siano x_1 ed x_2 due elementi di I con $x_1 < x_2$; e sia x_0 un punto per cui $x_1 < x_0 < x_2$. Si ottiene facilmente che

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}.$$

Quindi, dopo facili calcoli, la tesi.

$\square$

Per la utilizzazione del teorema precedente sono utili le seguenti due proposizioni.

Proposizione 38 *Sia f derivabile nell'intervallo I; f convessa in I se e solo se f' crescente in I.*

Proposizione 39 *Sia f di classe $\mathcal{C}^2$ nell'intervallo I; f convessa in I se e solo se $f'' \geq 0$ in I.*

Per noti teoremi basterà dimostrare la Proposizione 38.

DIM:

$\Rightarrow$) Per il teorema precedente si ha che per ogni $x_0, x_1 \in I$,

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

Pertanto fissati x_0 e x_1,

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0),$$

$$f(x_0) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_0 - x_1).$$

Sommando membro a membro si deduce la tesi.

$\Leftarrow$) Siano x_0 ed x_1 elementi di I; per il teorema di Lagrange, si ha che esiste un punto c dell'intervallo di estremi x_0 e x_1 per cui:

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0).$$

Da questa uguaglianza, si ricava (comunque sia la relazione tra x_1 e x_0);

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

$\square$

Si può trovare che le funzioni strettamente convesse in un intervallo I hanno in ogni sottointervallo chiuso e limitato un unico punto di massimo; mentre le strettamente concave un unico punto di minimo.

13.3 Insiemi convessi

Una differente definizione delle funzioni convesse ricorre al concetto di **insieme convesso**. Sia E uno spazio vettoriale, si dice che A **è sottoinsieme convesso di** E se e solo se per ogni $x, y \in A$ e per ogni $\lambda \in (0, 1)$,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Per esempio in $\mathbb{R}$ gli intervalli e le semirette sono insiemi convessi (ci sono altri insiemi che siano convessi?); in $\mathbb{R}^2$ i cerchi, i semipiani, i triangoli, ecc. sono insiemi convessi, non lo sono le corone circolari.

Utilizzando questo concetto si può dare la seguente definizione che è equivalente a quella già data.

Definizione 24 *f convessa in I se e solo se*

$$A = \{(x, y) : x \in I, f(x) < y\}$$

è convesso.

Capitolo 14

Asintoti verticali

Supponiamo di avere $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 punto di accumulazione di X non appartenente ad X.

Definizione 25 *Se $x_0 \in \mathbb{R}$ diciamo che la retta $x = x_0$ è asintoto verticale per il grafico di f se*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ diciamo che la retta $x = x_0$ è asintoto verticale a sinistra per il grafico di f se

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ diciamo che la retta $x = x_0$ è asintoto verticale a destra per il grafico di f se

$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Naturalmente x_0 può essere di accumulazione sia a destra che a sinistra per X; la definizione precedente allora può essere riletta nella forma più sintetica "la retta $x = x_0$ è un asintoto verticale per f se almeno uno dei due limiti- a destra e a sinistra- esiste ed è $+\infty$ o $-\infty$". Si noti che se f ammette in x_0 un asintoto verticale allora essa non è continua in x_0. Esempi di funzioni aventi asintoti verticali sono le seguenti;

$$f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0;$$

$$f_2(x) = \left|\frac{1}{x}\right|, \quad x_0 = 0;$$

mentre per esempio

$$f_3(x) = \frac{\sin x}{x}$$

per $x_0 = 0$ non ha asintoto verticale (ma come ben sappiamo è prolungabile in $x_0 = 0$).

Capitolo 15

Asintoti orizzontali ed obliqui

Supponiamo di avere $f : X \to \mathbb{R}$ con X illimitato superiormente (un discorso analogo si può fare se X è illimitato inferiormente).

Definizione 26 *Se*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R},$$

diciamo che la retta $y = \lambda$ è asintoto orizzontale per il grafico di f per x che tende a $+\infty$.

Esempio 2 *Le funzioni*

$$f_1(x) = \arctan x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x}$$

hanno rispettivamente per asintoto orizzontale a $+\infty$ le rette $y = \pi/2$ e $y = 0$.

Osserviamo che la condizione data dalla precedente definizione si può scrivere anche così

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \exists \lim_{x \to +\infty} |f(x) - \lambda| = 0.$$

In questa formulazione l'informazione data dalla precedente definizione si può subito generalizzare per dare la seguente definizione.

Definizione 27 *Data la retta $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ diciamo che essa è asintoto obliquo per il grafico di f per x che tende a $+\infty$ se*

$$\exists \lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

La definizione precedente assicura che "il comportamento del grafico di f per x che tende a $+\infty$ è confrontabile con il comportamento del grafico della retta asintoto obliquo ", pertanto è bene, prima di ricercare tali tipi di asintoto, assicurarsi che per x che tende a $+\infty$ la funzione diverga.

È altresì evidente che se f ha, per x che tende a $+\infty$, un asintoto orizzontale non può avere un asintoto obliquo e viceversa.

Esempio 3 *La funzione*

$$f_1(x) = 3x + 2 + \frac{1}{x}$$

ha come asintoto obliquo la retta $y = 3x + 2$.

Il seguente teorema stabilisce un procedimento generale per la determinazione dell'asintoto obliquo.

Teorema 54 *Sia* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *con* X *illimitato superiormente; supponiamo che*

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty.$$

La retta $y = ax + b$ *è asintoto obliquo per il grafico di* f *per* x *che tende a* $+\infty$ *se e solo se risulta;*

1.

$$\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a\,(a \neq 0),$$

2.

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}.$$

Dim:

$\Rightarrow$) Supponiamo che $y = ax + b$ sia asintoto obliquo, cioè che si abbia

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0;$$

siccome risulta

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - ax - b}{x} + a - \frac{b}{x},$$

da ciò si deduce subito 1.; la 2. segue banalmente dalla definizione di limite.

$\Leftarrow$) Da 2. segue la tesi (la condizione 1. permette di considerare il coefficiente angolare- finito- della retta).

$\square$

Capitolo 16

Teoria della integrazione

16.1 Funzioni costanti a tratti e loro integrale

Sia data una funzione $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diremo che essa è una funzione **costante a tratti** (o anche **semplice**) se si ha che $\exists I_i = [a_i, b_i[$, $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, p$ con $[a_i, b_i[\cap [a_j, b_j[= \emptyset$ per $i \neq j$, $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, p$ per cui

$$s(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \phi_{I_i}(x), \tag{16.1}$$

dove

$$\phi_{I_i}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I_i \\ 0 & \text{se } x \notin I_i. \end{cases}$$

Le funzioni costanti a tratti godono della proprietà di essere limitate e nulle fuori di un compatto.

Inoltre la formula di "rappresentazione" (16.1) può non essere unica, nel senso che può esistere una q–pla di intervalli ed una q–pla di numeri reali per cui s si può "rappresentare" rispetto a questo nuovo sistema.

Osservazione 8 *Date due famiglie finite di intervalli A_1 ed A_2 con in particolare*

$$A_1 = (I_i)_{i=1,\dots,p}, \quad A_2 = (J_j)_{j=1,\dots,s},$$

allora esiste una famiglia finita di intervalli

$$A_3 = (C_t)_{t=1,\dots,m}$$

per cui

- *gli intervalli C_t hanno solo estremi in comune;*
- $\cup C_t = (\cup I_i) \cup (\cup J_j)$*;*
- *ogni C_t è contenuto in qualche I_i o J_j;*

- *se le due famiglie sono formate da intervalli semiaperti a destra, allora gli intervalli C_t sono anch'essi dello stesso tipo e disgiunti.*

  Dim:
  Consideriamo la famiglia di intervalli
  $$C_{i,j} = I_i \cap J_j$$
  (quando tale intersezione è non vuota). A tali intervalli aggiungiamo gli intervalli di A_1 e di A_2 che hanno intersezione vuota con gli intervalli di A_2 e di A_1 rispettivamente, in questo modo otteniamo la famiglia A_3 richiesta.

  Una maniera differente di dimostrare il risultato può essere quella che ora esponiamo. Ordiniamo gli estremi degli intervalli delle due famiglie A_1 ed A_2 in maniera crescente. Otteniamo così una famiglia di intervalli tutti contigui uno con l'altro; basterà allora considerare la sottofamiglia costituita dagli intervalli che hanno intersezione non vuota con qualche intervallo della famiglia A_1 oppure A_2. □

Si pone
$$S = \{s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : s \text{ costante a tratti}\}.$$
S è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni reali di variabile reale definite in $\mathbb{R}$ (per provare questo fatto è utile l'osservazione precedente); anzi S è un sottospazio a dimensione infinita. Inoltre S gode anche della seguente proprietà: $s \in S$ allora $|s| \in S$. Infine si può provare il seguente fatto; siano $s, t \in S$ allora le due funzioni $s \wedge t$ ed $s \vee t$ sono elementi di S. Ricordiamo che
$$s \wedge t(x) = \sup\{s(x), t(x)\}, \quad s \vee t(x) = \inf\{s(x), t(x)\}.$$

16.2 Integrale delle funzioni costanti a tratti: definizione e proprietà

Sia s una funzione costante a tratti e supponiamo che si abbia:
$$s(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \phi_{I_i}(x),$$
dove $I_i = [a_i, b_i[$; chiameremo **integrale di** s il numero reale dato da
$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i |I_i|,$$
dove $|I_i| = b_i - a_i$. Indicheremo tale numero con il simbolo
$$\int s(x)dx.$$

È importante la seguente.

Osservazione 9 *Il numero* $\int s(x)dx$ *dipende da* s *e non dalla rappresentazione di* s.

È da notare inoltre che se

$$s(x) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \phi_{I_i}(x)$$

ed è $\alpha_i \geq 0$ per ogni i, il numero $\int s(x)dx$ rappresenta l'area della figura piana formata da p rettangoli di base $|I_i|$ ed altezza α_i.

Proposizione 40

1. *Per ogni* $s, t \in S$,

$$\int (s(x) + t(x))dx = \int s(x)dx + \int t(x)dx.$$

2. *Per ogni* $s \in S$, *per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int \lambda s(x)dx = \lambda \int s(x)dx.$$

3. *Per ogni* $s \in S$, $s \geq 0$ *allora*

$$\int s(x)dx \geq 0.$$

4. *Per ogni* $s, t \in S$, $s \geq t$ *allora*

$$\int s(x)dx \geq \int t(x)dx.$$

5. *Per ogni* $s \in S$,

$$\left| \int s(x)dx \right| \leq \int |s(x)|dx.$$

Le prime due condizioni si esprimono dicendo che **l'integrale (delle funzioni costanti a tratti) è un funzionale lineare**; la terza si esprime dicendo che **l'integrale è un funzionale monotono crescente**.

Il simbolo $\int$, come si può chiaramente intendere dalla definizione posta, è una deformazione del simbolo di sommatoria $\sum$; il simbolo dx che compare nella notazione di integrale ci ricorda che, nella definizione posta, la misura degli intervalli di $\mathbb{R}$ è quella "euclidea" cioè la loro lunghezza "geometrica".

16.3 Funzioni integrabili secondo Riemann

Ci proponiamo di estendere il concetto di integrale di una funzione, a funzioni più generali di quelle di S (ed in maniera tale che il procedimento adottato ci permetta ancora di parlare di integrale delle funzioni di S e che il valore dell'integrale coincida con quello già definito sulle funzioni di S). I metodi per poter effettuare tale estensione sono differenti e più o meno elaborati. La loro "efficacia" si può stabilire a posteriori, quando a teoria della integrazione conclusa, si potranno confrontare gli insiemi delle funzioni integrabili rispetto ai vari metodi e riconoscere così se una teoria è applicabile a classi di funzioni più o meno ampie di quelle a cui si può applicare una differente teoria dell'integrazione.

Naturalmente all'estensione del concetto di integrale di una funzione, riguardato come funzionale che ad una funzione associa un numero reale, dovremmo richiedere che goda almeno delle proprietà della proposizione precedente; ciò presuppone anche che la classe delle funzioni per le quali si possa estendere il concetto di integrale deve essere ben strutturata algebricamente, in particolare deve essere uno spazio vettoriale di funzioni chiuso per il valore assoluto (cioè se una funzione f appartiene a tale classe, vi appartiene anche $|f|$). Sia data $f \in L_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cioè una funzione reale di variabile reale **limitata e nulla fuori di un compatto**). I seguenti sottoinsiemi di S sono non vuoti

$$\begin{aligned} S_+(f) &= \{s \in S; s(x) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}, \\ S_-(f) &= \{s \in S; s(x) \leq f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Infatti basta osservare che considerato $M \in R$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $I = [a, b]$ per cui $x \notin [a, b]$ allora $f(x) = 0$, si ha che

$$-M\phi_{[a,b]}(x) \leq f(x) \leq M\phi_{[a,b]}(x), \quad \forall x \in I.$$

Pertanto i seguenti insiemi numerici

$$A(f) = \{\int s(x)dx : s \in S_-(f)\}, \quad B(f) = \{\int s(x)dx : s \in S_+(f)\}$$

sono non vuoti. Per la proprietà (4) della Proposizione 40 si ha che la coppia $(A(f), B(f))$ è separata, cioè $\forall \alpha \in A(f)$, $\forall \beta \in B(f)$, $\alpha \leq \beta$. Pertanto $A(f)$ è limitato superiormente e $B(f)$ è limitato inferiormente. Poichè in $\mathbb{R}$ vale l'assioma di completezza, possiamo asserire che

$$\exists \sup A(f) \in \mathbb{R}, \quad \exists \inf B(f) \in \mathbb{R}$$

e risulta

$$\sup A(f) \leq B(f).$$

Si pone **integrale inferiore di f il numero reale** $\sup A(f)$ e **integrale superiore di f il numero reale** $\inf B(f)$ e si scrive

$$\underline{\int} f(x)dx = \sup A(f), \quad \overline{\int} f(x)dx = \inf B(f).$$

Definizione 28 *Sia* $f \in L_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. f *è* **integrabile** *se e solo se* $\sup A(f) = \inf B(f)$ *se e solo se gli insiemi numerici separati* $A(f)$ *e* $B(f)$ *sono contigui, se e solo se* $\forall \varepsilon > 0$ *esistono* $s, t \in S$ *per cui si abbia* $s \leq f \leq t$ *ed inoltre*

$$\int t(x)dx - \int s(x)dx < \varepsilon.$$

Inoltre se f *è integrabile si pone, per definizione:*

$$\int f(x)dx = \sup A(f) \quad (= \inf B(f)).$$

Tale numero reale si dice **integrale di** f **secondo Riemann**.

Non è difficile provare che se $s \in S$ allora essa è integrabile ed il suo integrale coincide con quello definito precedentemente. D'altra parte, come faremo vedere successivamente, esistono funzioni non costanti a tratti che sono integrabili secondo la definizione posta ed esistono funzioni non integrabili. Per convincersi di quest'ultima considerazione basta osservare che per la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

si ha $\sup A(f) = 0$ e $\inf B(f) = 1$.

Il seguente criterio di integrabilità sarà utile per dimostrare alcuni teoremi successivi.

Teorema 55 (Criterio di Integrabilità) *Sia* $f \in L_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. f *è integrabile se e solo se esistono* (ϕ_n) *e* (ψ_n) *successioni di elementi di* S *per cui*

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim \int \phi_n dx = \lim \int \psi_n dx.$$

Anzi in questa situazione si ha:

$$\int f(x)dx = \lim \int \phi_n dx = \lim \int \psi_n dx.$$

Inoltre si possono scegliere le due successioni in modo che si abbia $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ *e* $\psi_{n+1} \leq \psi_n$.

La dimostrazione è semplice e lasciata come esercizio.

Il seguente teorema chiarisce la struttura della classe delle funzioni integrabili e le proprietà dell'integrale come funzionale reale.

Teorema 56 *Siano* $f, g \in L_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. *f, g integrabili, allora $f+g$ integrabile e*
$$\int (f+g)dx = \int f dx + \int g dx;$$
2. *f integrabile e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora λf integrabile e*
$$\int (\lambda f) dx = \lambda \int f dx;$$
3. *f integrabile, allora $f \wedge 0$, $f \vee 0$ e $|f|$ sono integrabili;*
4. *f integrabile, $f \geq 0$, allora*
$$\int f dx \geq 0;$$
5. *f, g integrabili, $f \geq g$, allora*
$$\int f dx \geq \int g dx;$$
6. *f integrabile, allora*
$$\left| \int f dx \right| \leq \int |f| dx;$$
7. *f, g integrabili, $f \geq 0$ e $g \geq 0$, allora fg integrabile;*
8. *f, g integrabili, allora fg integrabile.*

DIM:

1. Siano $\{(\phi_n), (\psi_n)\}$ e $\{(\bar{\phi}_n), (\bar{\psi}_n)\}$ coppie di successioni per le quali sia verificato il criterio di integrabilità per f e g rispettivamente, cioè per cui si abbia

$$(\phi_n), (\psi_n), (\bar{\phi}_n), (\bar{\psi}_n) \text{ successioni di elementi di } S;$$

$$\phi_n \leq f \leq \psi_n, \quad \bar{\phi}_n \leq g \leq \bar{\psi}_n;$$
$$\int \phi_n dx \leq \int \psi_n dx, \quad \int \bar{\phi}_n dx \leq \int \bar{\psi}_n dx;$$

$$\begin{aligned} \lim \int \phi_n dx &= \lim \int \psi_n dx = \int f dx, \\ \lim \int \bar{\phi}_n dx &= \lim \int \bar{\psi}_n dx = \int g dx. \end{aligned}$$

Possiamo ora considerare le successioni di elementi di S date da

$$(\phi_n + \bar{\phi}_n), \quad (\psi_n + \bar{\psi}_n).$$

Per esse si verificano le condizioni del criterio di integrabilità per la funzione $f+g$ (basta utilizzare 2. e 5. delle funzioni costanti a tratti); per provare la relazione scritta per gli integrali basta considerare anche 4..

2. Siano $\{(\phi_n), (\psi_n)\}$ tali che $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ e per cui si abbia;

$$\lim \int \phi_n dx = \lim \int \psi_n dx \int f dx.$$

Allora se $\lambda \geq 0$, per le successioni $\{(\lambda\phi_n), (\lambda\psi_n)\}$ si avrà che $\lambda\phi_n \leq \lambda f \leq \lambda\psi_n$ ed inoltre

$$\lim \int (\lambda\phi_n) dx = \lim \int (\lambda\psi_n) dx = \int (\lambda f) dx,$$

essendo anche

$$\begin{aligned} \lim \int (\lambda\phi_n) dx &= \lim \int (\lambda\psi_n) dx = \lambda \lim \int \phi_n dx \\ &= \lambda \lim \int \psi_n dx = \lambda \int f dx, \end{aligned}$$

se ne deduce la tesi. Se $\lambda < 0$, si procede analogamente.

3. Siano $\{(\phi_n), (\psi_n)\}$ tali che $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ e per cui si abbia

$$\lim \int \phi_n dx = \lim \int \psi_n dx = \int f dx.$$

Osserviamo che le successioni di elementi di S date da:

$$\phi_n \vee 0, \quad \psi_n \vee 0$$

verificano le seguenti condizioni

$$\phi_n \vee 0 \quad \leq \quad f \vee 0 \leq \psi_n \vee 0,$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \int \psi_n \vee 0 dx - \int \phi_n \vee 0 dx &= \int (\psi_n \vee 0 - \phi_n \vee 0) dx \\ &\leq \int (\psi_n - \phi_n) dx; \end{aligned}$$

da ciò si deduce facilmente che $f \vee 0$ è integrabile. Per $f \wedge 0$ si procede alla stessa maniera. Per provare che $|f|$ è integrabile basta osservare che vale la seguente uguaglianza:

$$|f| = f \vee 0 - f \wedge 0$$

ed applicare 1. e 2. precedenti.

4. Siano $\{(\phi_n), (\psi_n)\}$ tali che $\phi_n \leq f \leq \psi_n$ e per cui si abbia
$$\lim \int \phi_n dx = \lim \int \psi_n dx = \int f dx.$$
Allora, essendo $f = f \vee 0$ e $\psi_n \geq f$ si avrà
$$\int \psi_n dx \geq 0, \tag{16.2}$$
da ciò tenuto conto di (16.2) segue la tesi.
5. È una ovvia conseguenza di 1., 2. e 4..
6. Tenuto conto di 3., basta osservare che risulta $-|f| \leq f \leq |f|$ ed applicare 5. e note proprietà del valore assoluto.
7. Supponiamo f, g integrabili e non negative; esisteranno
$$(\phi_n), (\psi_n), (\bar{\phi}_n), (\bar{\psi}_n) \text{ successioni di elementi di } S$$
verificanti le condizioni del criterio di integrabilità per f e g rispettivamente; possiamo supporre (vedi dim. 4.);
$$0 \leq \phi_n f \leq\leq \psi_n, \quad 0 \leq \bar{\phi}_n \leq g \leq \bar{\psi}_n.$$
D'altra parte essendo f e g limitate potremo supporre che $\exists M \in \mathbb{R}$ per cui
$$-M \leq \phi_n \leq f \leq \psi_n \leq M, \quad -M \leq \bar{\phi}_n \leq g \leq \bar{\psi}_n \leq M.$$
Da 2. segue che $\phi_n \bar{\phi}_n \leq fg \leq \psi_n \bar{\psi}_n$. Inoltre
$$0 \leq \int (\psi_n \bar{\psi}_n - \phi_n \bar{\phi}_n) dx \leq M \int (\psi_n - \phi_n) dx + M \int (\bar{\psi}_n - \bar{\phi}_n) dx$$
e questo basta per la tesi.
8. Sia I un intervallo chiuso e limitato al di fuori del quale f e g siano nulle. Sia inoltre $M \in \mathbb{R}$ per cui
$$-M \leq f \leq M, \quad -M \leq g \leq M.$$
Consideriamo le seguenti funzioni non negative ed integrabili (in virtù delle precedenti proprietà)
$$f_1(x) = f(x) + M\phi_I(x), \quad g_1(x) = g(x) + M\phi_I(x).$$
La funzione $f_1 g_1$ è integrabile e siccome si ha
$$fg = f_1 g_1 - Mf - Mg - M^2 \phi_I$$
si deduce che fg è integrabile.

$\square$

Il seguente teorema assicura la esistenza di funzioni integrabili che non siano costanti a tratti.

Teorema 57 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona. La funzione f^* così definita*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

è integrabile.

Dim:
Supponiamo che f sia crescente; ricaviamo subito che f^* è limitata difatti si ha

$$f(a) \wedge 0 \leq f^*(x) \leq f(b).$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e dividiamo l'intervallo, che indicheremo con I, in n sottointervalli di ampiezza $\delta = (b-a)/n$; indichiamo poi con I_i il generico sottointervallo e sia $I_i = [x_{i+1}, x_i[$, $i = 1, \dots, n-1$; $I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Definiamo poi le seguenti funzioni costanti a tratti

$$\phi_n(x) = \sum \inf f(I_i)\phi_{(}I_i)(x) = \sum f(x_{i-1})\phi_{(}I_i)(x),$$

$$\psi_n(x) = \sum \sup f(I_i)\phi_{(}I_i)(x) = \sum f(x_i)\phi_{(}I_i)(x).$$

Risulta evidentemente

$$\phi_n \leq f^* \leq \psi_n;$$

inoltre

$$\begin{aligned} 0 \leq \int(\psi_n - \phi_n)dx &= \sum(f(x_i - f(x_{i-1})))\frac{(b-a)}{n} \\ &= (b-a)\frac{f(b)-f(a)}{n} \end{aligned}$$

da ciò si deduce subito che f^* è integrabile. $\square$

16.4 Integrale esteso ad un intervallo

Sia data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; possiamo porre la seguente definizione

Definizione 29 *f integrabile in $[a, b]$ se e solo se*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è integrabile.

In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \int f^*(x)dx$$

ed esso si dice integrale di f esteso all'intervallo $[a, b]$; naturalmente potremo parlare anche di integrale di f esteso a sottointervalli dell'insieme di definizione di f.

Porremo altresì per convenszione:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

In teorema dato precedentemente assicura la esistenza di funzioni che sono integrabili su intervalli. Il teorema seguente ci assicura la esistenza di una altra larga classe di funzioni integrabili su intervalli.

Teorema 58 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; se f è continua in I, allora f è integrabile in I.*

DIM:
Ricordiamo che per il teorema di Heine-Cantor f è uniformemente continua in I; pertanto fissato $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che ogni partizione di I in sottointervalli, siano I_i, tutti di ampiezza minore di δ si abbia

$$\operatorname*{osc}_{I_i} f = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f < \frac{\varepsilon}{(b-a)}.$$

Considerata la funzione

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e fissato $\varepsilon > 0$, sia Π una partizione di I, costituita dalla famiglia di intervalli $(I_i)_{i=1,\dots,p}$ (semiaperti a destra) e verificante le condizioni precedentemente descritte. Ha significato considerare le seguenti funzioni costanti a tratti:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^p (\inf_{I_i} f)\phi_{I_i}(x), \quad \psi(x) = \sum_{i=1}^p (\sup_{I_i} f)\phi_{I_i}(x).$$

Risulta evidentemente $\phi \leq f^* \leq \psi$. Inoltre

$$\int \psi(x)dx - \int \phi(x)dx = \sum_{i=1}^p \left(\operatorname*{osc}_{I_i} f\right) |I_i| \leq \varepsilon.$$

Per un criterio di integrabilità la funzione f^* è integrabile. □

Di facile verifica è la seguente proposizione.

Proposizione 41 *Sia $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$; se f è continua in I ad eccezione di un numero finito di punti e se f è anche limitata allora f è integrabile in I.*

DIM:
Supponiamo che la f non sia continua in un solo punto di I, sia tale punto x_0 (la dimostrazione si generalizza subito al caso finito di punti di discontinuità). Sia $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in I$ e consideriamo la funzione f^* definita a partire da f al solito modo. Fissato $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo in modo che $I_0 =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset I$, consideriamo la funzione f ristretta al compatto (chiuso e limitato) $I \setminus I_0$; possiamo allora ritenere che f è ivi uniformemente continua. Procedendo come nel precedente teorema consideriamo le funzioni costanti a tratti date da:

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{p} (\inf_{I_i} f) \phi_{I_i}(x) - M\phi_{I_0}(x);$$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{p} (\sup_{I_i} f) \phi_{I_i}(x) + M\phi_{I_0}(x).$$

Risultando, con facili calcoli,

$$\int \psi(x)dx - \int \phi(x)dx \leq \varepsilon + 2M\varepsilon.$$

ne deduciamo subito la tesi. □

16.5 Proprietà dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione

Sussiste la seguente proprietà.

Proposizione 42 *Sia $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile; allora $\forall c$ tale che $a \leq c \leq b$ risulta che f è integrabile nei due intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$; inoltre vale la uguaglianza*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \tag{16.3}$$

(Tale proprietà si dice "additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione").

In generale (16.3) può essere così riformulata: se due degli integrali di (16.3) esistono allora esiste il terzo e vale l'uguaglianza.

Tenendo conto delle convenzioni posta, la (16.3) può essere così riscritta:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0.$$

Dim:
Sia $c \in [a, b]$ e f^* la solita funzione definita in $\mathbb{R}$ associata alla funzione integrabile f. Consideriamo le funzioni caratteristiche degli intervalli di estremi a, c, e c, b, e siano ϕ_1 e ϕ_2 rispettivamente. Siccome tali funzioni sono integrabili, ne deduciamo che le due funzioni $f^*\phi_1$ e $f^*\phi_2$ sono integrabili; pertanto la funzione f ristretta ai due sottointervalli è integrabile. D'altra parte è facile verificare che si ha

$$f^* = f^*\phi_1 + f^*\phi_2.$$

Da ciò segue la relazione tra gli integrali di f sui tre intervalli. $\square$

16.6 Passaggio al limite sotto il segno di integrale

Supponiamo di considerare una successione di funzioni reali tutte definite in uno stesso intervallo, sia $I = [a, b]$. Supponiamo inoltre che le funzioni f_n della data successione siano tutte integrabili in I; cosa possiamo dire della successione numerica

$$\int_I f_n(x)dx?$$

Per poter dare una qualche risposta al precedente problema occorre parlare della **convergenza di una successione di funzioni**. Diamo un breve cenno di alcuni tipi di convergenza di una successione di funzioni utili allo scopo prefisso.

Sia (f_n) una successione di funzioni reali definite in $X \subset \mathbb{R}$. Osserviamo subito che per ogni $x \in X$ è individuata la successione reale $(f_n(x))_n$.

Definizione 30 *La successione di funzioni $(f_n)_n$ definite in $X \subset \mathbb{R}$ e a valori reali converge puntualmente alla funzione f definita in X e a valori reali se accade che:*

$$\forall x \in X, \lim f_n(x) = f(x),$$

cioè per ogni $x \in X$ si ha che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ (dipendente da x e da ε) tale che per $n > \nu$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definizione 31 *La successione di funzioni $(f_n)_n$ definite in $X \subset \mathbb{R}$ e a valori reali converge uniformemente alla funzione f definita in X e a valori reali se accade che $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\nu \in \mathbb{N}$ (dipendente solo da ε) tale che per $n > \nu$*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X.$$

È evidente che se la successione $(f_n)_n$ converge uniformemente alla funzione f allora vi converge anche puntualmente.

Un importante teorema sulla convergenza uniforme è il seguente.

Teorema 59 *Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni reali definite in X. Se la successione è formata da funzioni continue in X e se la successione converge uniformemente ad f, allora la funzione f è continua in X.*

DIM:
Osserviamo che, qualunque siano x, x_0 ed n, si ha

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)|; \tag{16.4}$$

nel secondo membro di tale diseguaglianza il primo ed il terzo addendo si possono maggiorare uniformemente rispetto ad x per la convergenza, mentre nel secondo addendo si può utilizzare il fatto che la successione è formata da funzioni continue. Fissiamo $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ e sia $\nu \in \mathbb{N}$ per cui si abbia per $n > \nu$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in X.$$

Sia $n_0 > \nu$ e $\delta > 0$ per cui si abbia per $|x - x_0| < \delta$:

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ne segue, da (16.4) con $n = n_0$, che per $|x - x_0| < \delta$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

□

Diamo alcuni esempi di convergenza uniforme.

Esempio 4 *Sia $x \in X$ con X compatto di $\mathbb{R}$ e*

$$f_n(x) = \frac{x^2 \sin(nx)}{n}.$$

La successione converge uniformemente alla funzione nulla.

Esempio 5 *Sia $x \in X$ con X compatto di $\mathbb{R}$;*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x+1)}{k^2}$$

converge uniformemente.

Vediamo anche un esempio di convergenza non uniforme.

Esempio 6 *Sia $x \in [0,1]$ e*

$$f_n(x) = x^n;$$

la successione converge solo puntualmente alla seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{per } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \textit{per } x = 1. \end{cases}$$

Possiamo ora concludere con una risposta al problema di partenza.

Teorema 60 *Sia $(f_n)_n$ una successione di funzioni reali definite in $[a, b]$. Se la successione è formata da funzioni continue in $[a, b]$ e se la successione converge uniformemente ad f, allora la funzione f è integrabile in $[a, b]$ e si ha*

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

DIM:
Anzitutto osserviamo che ha significato considerare

$$\int_a^b f(x)dx$$

in quanto la funzione f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ (indichiamolo con X). Fissiamo ora $\varepsilon > 0$ e consideriamo $\nu \in \mathbb{N}$ per cui si abbia per $n > \nu$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \forall x \in X.$$

Se $n > \nu$, si ha che:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

e quindi la tesi. $\square$

Capitolo 17

Teoremi fondamentali del calcolo integrale

17.1 Alcuni teoremi generali

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile (pertanto è sicuramente limitata).

Proposizione 43 *Se $f : X = [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile, allora si ha*

$$\inf_X f \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \sup_X f.$$

DIM:
Basta considerare le due funzioni costanti a tratti date da:

$$\phi(x) = \left(\inf_X f\right) \phi_X(x), \quad \psi(x) = \left(\sup_X f\right) \phi_X(x)$$

ed osservare che $\phi \leq f \leq \psi$. Passando agli integrali delle tre funzioni, la diseguaglianza si conserva e pertanto se ne deduce la tesi.
□

Teorema 61 (Della media integrale) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua allora si ha che esiste $c \in [a, b]$ tale che*

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

DIM:
Basta tenere conto della proposizione precedente e del fatto che il codominio di f è un intervallo chiuso e limitato. □

17.2 Il concetto di primitiva di una funzione

La nozione di primitiva di una funzione riveste particolare interesse per il problema del "calcolo degli integrali"; inoltre essa chiarisce il legame "funzionale" tra l'operazione di derivazione e l'operazione di integrazione, come si potrà comprendere dai successivi teoremi.

Definizione 32 *Siano $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$; si dice che F è una primitiva di f se si ha:*

1. *F continua in $[a, b]$;*
2. *F derivabile in $]a, b[$;*
3. *$F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in]a, b[$.*

La totalità delle primitive di una funzione è ben individuata da questo teorema (il quale però non assicura l'esistenza di primitive per la funzione data).

Teorema 62 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; se f ammette una primitiva G allora ne ammette infinite che differiscono da G per una costante additiva.*

> DIM:
> È evidente che se G è una primitiva di f allora ogni funzione $H(x) = G(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$) è ancora primitiva di f. D'altra parte se G e G_1 sono due primitive di f, allora la funzione $H(x) = G(x) - G_1(x)$ è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e con derivata nulla. Per un corollario al teorema di Lagrange, H deve essere una funzione costante. □

Osserviamo che data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ il problema della ricerca di una primitiva di f può essere così formulato: "determinare una funzione F assegnati che siano i coefficienti angolari f delle rette tangenti al grafico di F". Con questa formulazione si può ben comprendere il risultato del precedente teorema.

L'utilizzazione delle primitive è messa in evidenza da questa proposizione.

Proposizione 44 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ verificante la seguente condizione: per ogni $x \in [a, b]$ esiste*

$$\int_a^x f(t)dt.$$

Se le funzioni

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

e $G(x)$ sono entrambe primitive per f, allora risulta:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) (= G(t)|_a^b).$$

DIM:
Per il teorema precedente si deve avere che per ogni $x \in [a, b]$

$$F(x) = G(x) + k_0$$

con k_0 una fissata costante reale. Siccome $F(a) = 0$, deve essere $k_0 = -G(a)$, perciò; per ogni $x \in [a, b]$, $F(x) = G(x) - G(a)$. Ponendo $x = b$ nell'ultima eguaglianza si deduce la tesi. □

Osservazione 10 *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile si ha che la funzione F di cui al precedente teorema è Lipschitziana.*

Basta osservare che $|f|$ è limitata (per esempio da M) e risulta:

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f(t)|dt \leq M|x_1 - x_2|.$$

Ci proponiamo ora di dare un teorema che assicura la esistenza di primitive per una larga classe di funzioni.

Teorema 63 (Fondamentale del calcolo integrale) *Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione continua, risulta:*

1. *per ogni $x \in [a, b]$ la funzione*

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

è una primitiva di f.

2. *Se G è un'altra primitiva di f allora risulta che:*

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

DIM:
Naturalmente dovremo provare solo la 1., in virtù di quanto detto nella proposizione precedente. Supponiamo di considerare la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Fissiamo $x_0 \in [a, b]$, calcoliamo $F(x) - F(x_0)$; risulta

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

Otteniamo così che esiste η, nell'intervallo di estremi x_0 e x per cui si ha:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(\eta)$$

(avendo applicato il teorema della media integrale nella ultima uguaglianza). Siccome f è continua e per x che tende ad x_0 anche η tende a x_0, ne segue che F è derivabile in x_0 e vale l'uguaglianza $F'(x_0) = f(x_0)$. □

Il teorema precedente chiarisce cosa si può fare per calcolare l'integrale di una funzione continua su di un intervallo; occorre determinare una funzione la cui derivata coincida con la funzione integranda. In questo senso si può intendere che l'operazione di integrazione e quella di derivazione sono una l'inverso dell'altra. A questa affermazione portiamo a sostegno la seguente proposizione (di per sè importante).

Proposizione 45 *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzione continua; supponiamo inoltre che f sia derivabile in $[a, b]$ con derivata continua. Allora risulta*

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

Con il simbolo $\int f(x)dx$ si indica l'insieme delle primitive di f e si dice integrale indefinito di f.

17.3 Regole di integrazione

Dai precedenti teoremi si può notare che è fondamentale, per calcolare gli integrali, la conoscenza dell'integrale generale di una funzione; ci proponiamo di dare alcune regole di integrazioni utili a tale scopo. Per quanto diremo successivamente supporremo sempre verificate le proprietà qualitative occorrenti.

Regola di integrazione per parti . Osservato che

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

integrando si ha:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (f(x)g(x))'dx = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Se ne deduce che

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = (f(b)g(b) - f(a)g(a)) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

La precedente uguaglianza si dice regola di integrazione per parti. La formula precedente può essere riscritta per gli integrali indefiniti e diviene

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Integrazione per sostituzione . Siano $f(x)$ una funzione continua ed $F(x)$ una sua primitiva; fissata una funzione derivabile $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$, ha significato considerare la funzione composta $G(t) = F(\phi(t))$. Risultando $G'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$ si ha che la funzione $G(t)$ è primitiva della funzione $f(\phi(t))\phi'(t)$. Otteniamo così la seguente uguaglianza

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = G(b) - G(a) = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

E quindi

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

La precedente formula si dice integrazione per sostituzione. Essa può essere riscritta per gli integrali indefiniti nella forma:

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int f(x)dx, \quad x = \phi(t).$$

La formula precedente è opportuna utilizzarla quando "il cambiamento di variabile $x = \phi(t)$" conduce ad una funzione di cui sia più facile calcolare una primitiva.

17.4 Formula di Taylor con resto integrale

Il seguente teorema da' una espressione, in forma di integrale, del resto n–esimo della formula di Taylor.

Teorema 64 *Sia $f \in \mathcal{C}^{n+1}$ in un intorno V di x_0. Allora per $x \in V$, si ha:*

$$R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

DIM:
Si ragiona per induzione. Per $n = 0$ essa è ovvia, essendo

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt = f(x) - f(x_0) = R_0(x, x_0).$$

Supposto che sia vera per $n - 1$, facciamo vedere che è vera per n.

Osserviamo che risulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt &= \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n)}(t)|_{x_0}^{x} + \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= -\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \\
&\quad + R_{n-1}(x,x_0) \\
&= -\frac{1}{n!}(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0) + \\
&\quad + f(x) - \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i.
\end{aligned}
$$

Da ciò la tesi. $\square$

Capitolo 18

Integrale in senso generalizzato

Abbiamo parlato precedentemente della teoria della integrazione per funzioni dello spazio $L_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, cioè per funzioni limitate e nulle fuori da un compatto. Tenendo conto del significato dell'integrale ci si può rendere conto che anche per funzioni non appartenenti alla classe precedente si potrebbe parlare di "integrale". Un esempio abbastanza semplice, ma significativo anche per la teoria della misura, è il seguente.

Consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{se } n \le x < n+1 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

L'insieme $A = \{(x,y) : 0 \le x; 0 \le y \le f(x)\}$ è non limitato ed è unione (numerabile) di rettangoli di base di lunghezza costante ed uguale ad 1. Sembra naturale però asserire che la sua area debba essere la somma della serie geometrica di ragione $1/2$; perciò sembra altrettanto naturale dare significato all'integrale della funzione $f(x)$, nonostante che la funzione f non sia nulla fuori di alcun compatto di $\mathbb{R}$. Con un procedimento un po' più elaborato si può considerare una funzione positiva definita in $\mathbb{R}$ e non nulla solo in $(0,1)$, non limitata, tale che per essa abbia significato definire il concetto di integrale.

Lo scopo di questa lezione è proprio quello di estendere, nella maniera più naturale possibile, il concetto di integrale a funzioni che non siano necessariamente limitate e nulle fuori di un compatto. In particolare ci preoccuperemo, nelle definizioni che daremo, prima di eliminare la condizione di limitatezza per funzioni nulle fuori di un compatto, quindi eliminare il fatto che sia nulla fuori di un compatto ed infine di eliminare le due condizioni. Naturalmente dovremo garantirci che le estensioni date siano coerenti con la definizione originaria.

18.1 Integrale su un intervallo limitato per funzioni non necessariamente limitate

Supponiamo di considerare una funzione reale di variabile reale, sia f. Allora ha significato considerare le seguenti due funzioni

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}$$

esse sono entrambe non negative e verificano la uguaglianza

$$f = f^+ - f^-.$$

Se $t \in \mathbb{R}$ indichiamo con f_t la funzione definita da:

$$f_t(x) = \min(f(x), t).$$

Possiamo ora dare la seguente definizione.

Definizione 33 *Sia f definita nell'intervallo limitato (a, b) e supponiamo che essa sia non negativa. Supponiamo che per ogni $t \geq 0$ la funzione f_t sia integrabile su (a, b). Se esiste finito*

$$\lim \int_a^b f_t(x)dx = \lambda$$

diremo che f è integrabile in senso improprio in (a, b) e il suo integrale su (a, b) è λ e si pone

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda.$$

Osserviamo esplicitamente che il limite di cui si parla nella precedente definizione esiste sicuramente. Se f è di segno qualsiasi si pone la seguente definizione.

Definizione 34 *f integrabile in (a, b) se e solo se lo sono sia f^+ e f^-; in questo caso si pone*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx.$$

È bene osservare che se f è integrabile in (a, b) allora essa è sicuramente integrabile sui sottointervalli di (a, b) e vale la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione.

Si potrebbe pensare nel caso in cui la funzione f presenta un punto di discontinuità, c, di seconda specie in (a, b) di dare la seguente definizione di funzione integrabile: esiste finito

$$\lim_{I_\varepsilon} \int_{(a,b)\setminus I_\varepsilon} f(x)dx$$

con I_ε famiglia di intorni di c che si restringe a c per $\varepsilon \to 0$. Si può subito osservare che la precedente proposta di definizione può presentare degli inconvenienti soprattutto se la funzione f non è di segno costante, potendosi per esempio verificare che tale limita esista e sia differente al variare della famiglia I_ε. Nel caso che la funzione f sia integrabile in (a,b), secondo la definizione a suo tempo data, è facile verificare che lo sarà secondo questa nuova definizione e gli integrali coincidono.

18.2 Integrale di funzioni limitate definite su una semiretta

Definizione 35 *Sia f una funzione limitata e non negativa in $(a,+\infty)$ tale che per ogni $c > a$ esista*

$$\int_a^c f(x)dx;$$

diciamo che f è integrabile in senso improprio su $(a,+\infty)$ se esiste finito

$$\lambda = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx;$$

si pone poi

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lambda.$$

Naturalmente analoga definizione si da' se la semiretta è del tipo $(-\infty, a)$. Come nel precedente caso definiamo poi le funzioni di segno non costante integrabili in $(a,+\infty)$. Si può in questa situazione provare che si ha:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad \forall c \geq a.$$

18.3 Integrazione di funzioni non necessaria– mente limitate definite su una semiretta

Definizione 36 *Sia f una funzione non negativa definita su $(a,+\infty)$ e non necessariamente limitata. Per $t > a$ poniamo $f_t(x) = f(x) \wedge t$; e supponiamo che per ogni $c > a$ esista*

$$\exists \int_a^c f_t(x)dx$$

(anche in senso improprio eventualmente). Diciamo che f è integrabile in $(a,+\infty)$ se esiste finito

$$\lambda = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f_t(x)dx$$

e si dice che λ è l'integrale di f su $(a,+\infty)$.

Se f è di segno qualsiasi, allora quest'ultima definizione si può estendere dicendo che f è integrabile se f^+ e f^- lo sono e ponendo

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f^+(x)dx - \int_a^{+\infty} f^-(x)dx.$$

Infine, se f è definita in $\mathbb{R}$ ed è non negativa, diremo che essa è integrabile se esiste finito il seguente limite

$$\lambda = \lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} f_t(x)dx.$$

Se f è di segno qualsiasi si procede come nei precedenti casi.

18.4 Alcuni criteri di integrabilità

Naturalmente come nel caso "classico" ci si chiede se è possibile dare delle condizioni che assicurino la integrabilità in senso improprio. Sussistono le seguenti proposizioni.

Proposizione 46 *Siano f e g due funzioni definite in (a, b) e supponiamo che:*

$$0 \le f(x) \le g(x), \quad \forall x \in (a, b).$$

Se g è integrabile in (a, b) e se f_t è integrabile in (a, b) per ogni t, allora f sarà integrabile in (a, b).

DIM:
Per ogni $t \ge 0$ risulta:

$$0 \le \int_a^b f_t(x)dx \le \int_a^b g_t(x)dx;$$

tenendo conto del fatto che f è non negativa e delle ipotesi su g, ne deduciamo la tesi. □

Specializzando la funzione g possiamo dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 47 *Sia f una funzione non negativa in (a, b), continua in (a, b) tale che esiste*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty.$$

Se esiste $\alpha < 1$ per cui

$$\lim_{x\to a} |x - a|^\alpha f(x) = 0$$

allora f è integrabile in (a, b).

Dim:
Considerando $a = 0$, basta porre $g(x) = x^{-\alpha}$, ed utilizzare la proposizione precedente, avendo osservato che con la condizione posta la funzione g è integrabile in $(0, b)$. $\square$

Proposizione 48 *Siano f e g due funzioni definite in $(a, +\infty)$ verificanti la seguente condizione;*

$$0 \leq f(x) \leq g(x).$$

Supponiamo che per ogni $t \geq 0$ la funzione f_t sia integrabile in (a, t) (eventualmente anche in senso improprio). Allora se g è integrabile in $(a, +\infty)$, anche f lo è.

La dimostrazione della precedente proposizione è banale e lasciata come esercizio.

Specializzando la funzione g possiamo dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 49 *Sia f una funzione continua definita in $[a, +\infty)$ e non negativa. Supponiamo esista $\alpha > 1$ per cui si abbia*

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} f(x) = 0;$$

allora f è integrabile in $[a, +\infty)$.

Dim:
Basta osservare che, definitivamente rispetto ad x, si ha:

$$f(x) \leq \frac{1}{x^{\alpha}}.$$

Ponendo $g(x) = 1/x^{\alpha}$ con $\alpha > 1$, si deduce che g è integrabile in $[a, +\infty)$, $a > 0$; per la proposizione precedente si deduce la tesi. $\square$