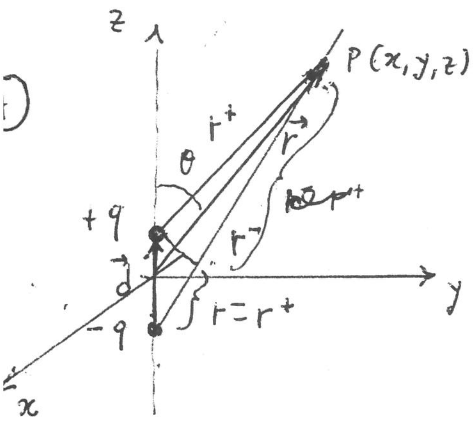
GLI ISOLANTI (i dipoli)



IL DIPOLO ELETTRICO

$$\begin{cases} \vec{E}_{TOT} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ -\vec{\nabla}\phi_{TOT} = -\vec{\nabla}\phi_1 - \vec{\nabla}\phi_2 = -\vec{\nabla}(\phi_1 + \phi_2) \end{cases} \Downarrow \quad \boxed{\phi_{TOT} = \phi_1 + \phi_2}$$

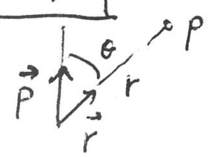
$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r^- - r^+}{r^- r^+}\right)$$

$r^- r^+ \approx r^2$ per grandi distanze

$$r^- - r^+ = |\vec{r}^- - \vec{r}^+| \simeq d\cos\theta \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{qd\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

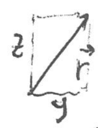
$\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$ Momento di dipolo

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}}$$

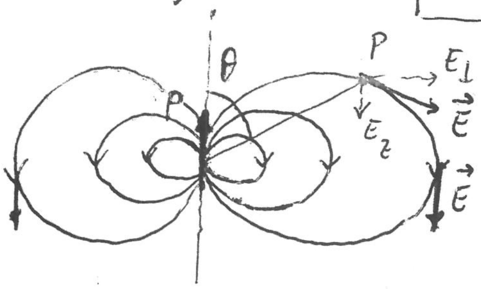


$\phi \propto \frac{1}{r^2}$ più rapido di una carica sola

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\left(\frac{z}{r}\right)^2 - 1}{r^3}$$



$$\Rightarrow \boxed{E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3}} \qquad \boxed{E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3zx}{r^5}} \qquad \boxed{E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3zy}{r^5}}$$



$$\boxed{E_\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3z}{r^5}\sqrt{x^2+y^2} = \boxed{\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\cos\theta\sin\theta}{r^3}}$$

Per $\theta = 0 \Rightarrow E_z = \frac{\cancel{2p}\, qd}{2\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^3}$ deve ridursi subito a zero perché da lontano appare neutro.

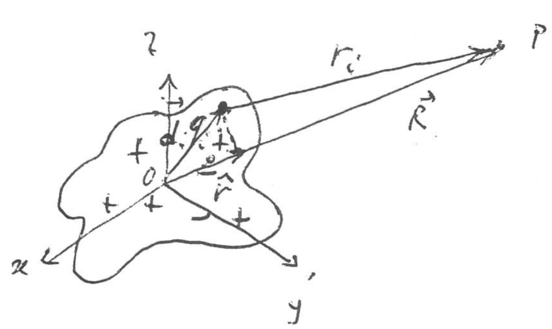
$\theta = 0 \Rightarrow E_\perp = 0$

Per $\theta = 90° \Rightarrow E_z = -\frac{qd}{4\pi\epsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^3}$

$\theta = 90° \Rightarrow E_\perp = 0$

Fare l'analisi per $\theta = 180°$, costruire $\phi(r,\theta) = \text{cost}$ e ricavare le linee di ~~co~~ forza. (A lezione E per casa) Vedere il flusso perché è zero.

APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO (Feynman pg 6-6)



$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad r_i = |\vec{R} - \vec{d}_i|$$

$$\text{Se } r \gg 0 \Rightarrow r_i \simeq R \Rightarrow \phi = \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

(molto lontano sembra una carica, se c'è) ecco che un atomo neutro mostra un potenziale nullo $\Rightarrow \vec{E} = 0$

La molecola d'acqua appare neutra.

(APPROSSIMAZIONE DI MONOPOLO)

$\longrightarrow$

(D) Se ci avviciniamo iniziamo a vedere cariche APPROSSIMAZIONE DI DIPOLO

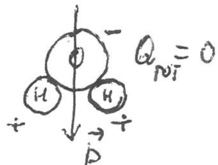
$r_i \approx R - \vec{d}_i \cdot \hat{r}$ $\qquad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum \frac{q_i}{r_i}$ $\qquad \frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\vec{d}_i \cdot \hat{r}}{R}\right)$

$\Rightarrow \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\vec{d}_i \cdot \hat{r}}{R^2}\right)$ Se l'oggetto è neutro il 1° termine si annulla.

Il 2° termine dipende da $\frac{1}{R^2}$ come un dipolo. $\boxed{\vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{d}_i}$ se $Q = 0$

$\Rightarrow \boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{R^2}}$ potenziale di dipolo. Momento di dipolo dell'approssimazione

questo termine è importante per le proprietà dell'acqua H_2O

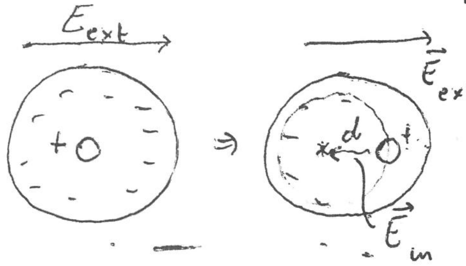


Per CO_2 OCO la struttura è simmetrica e neutra ($\vec{p} = 0$ e $Q = 0$)

$\Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R} = 0$ e $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{R^2} = 0$

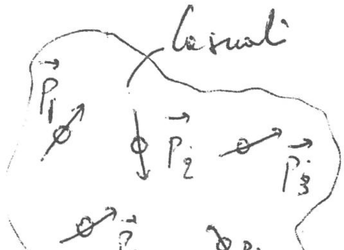
$\Rightarrow$ è presente il termine di quadrupolo che va come $1/R^3$.

INDUZIONE NEGLI ISOLANTI (DIPOLI INDOTTI)

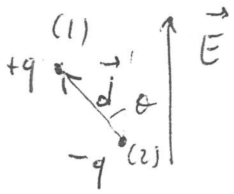


$+ZeE_{ext} = F_{int}$ Si genera un dipolo indotto $\vec{p} = q\vec{d}$

DIPOLI PERMANENTI



L'energia potenziale su un dipolo



è $U = q\phi(1) - q\phi(2) = q\Delta\phi$

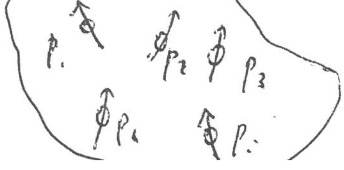
somma energie potenziali

Ma $\Delta\phi = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{d} \Rightarrow U = q\vec{d}\cdot\vec{\nabla}\phi = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$\boxed{U(\text{dipolo}) = -\vec{p}\cdot\vec{E} = -p_0 E\cos\theta}$ L'energia tende ad assumere il valore minimo $(\cos\theta = 1) \Rightarrow \theta = 0$

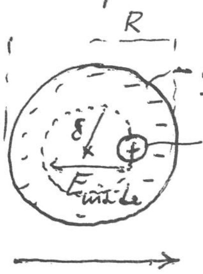
È negativa

I dipoli tendono ad allinearsi ad $\vec{E}$



I MODELLI MODERNI DI POLARIZZAZIONE
OVVERO:
PERCHÈ $\vec{P} \propto \vec{E}$ (I)

(A) Ci sono due modi a seconda che ci sia un momento di dipolo permanente o no. Vediamo la POLARIZZAZIONE INDOTTA.



$E_{inside} = \frac{-q_{inside}}{4\pi\epsilon_0\delta^2}$ = Campo sulla carica positiva causato dalla sfera di raggio δ

$$-q_{inside} = \frac{-q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\,\frac{4}{3}\pi\delta^3 \Rightarrow \boxed{E_{inside} = -\left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right]\delta = -k\delta}$$

$\Rightarrow$ Il campo $E_{inside} \propto \delta$. Le cariche si separano finquando

$E_{inside} = E \Rightarrow q\delta = 4\pi\epsilon_0 R^3 E$ Ma $q\delta = p \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\vec{p} = \alpha\epsilon_0\vec{E}\\ \alpha = 4\pi R^3\end{array}}$ polarizzabilità

per n atomi$/m^3$ $\boxed{\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\epsilon_0\vec{E}} = \chi\epsilon_0\vec{E}$ $\boxed{\chi = n\alpha}$ per dipoli indotti

Ma $\epsilon_r = 1 + \chi = 1 + n\alpha$ ϵ_r lo misuro, e ricavo $\epsilon_r - 1$ cioè $(n\alpha)_{sperim}$ e confronto con $(n\alpha)_{teoria}$ vedo se funziona.

(B) ESEMPIO: H_2 ed He.

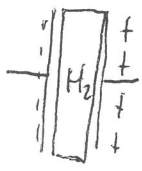
$\alpha = 4\pi\epsilon_0 R^3$ in realtà va sostituita (con la Meccanica Quantistica) con

$\boxed{\alpha = 18\pi R^3_{BOHR}}$ Per H si ha $\alpha_H = 18\pi\,(0{,}528\times10^{-8})^3 = 8.3\times10^{-24}$

Quanto vale n? Ad 1 atm e 0°C $pV = NKT \Rightarrow n = \frac{p}{KT} = 2.7\times10^{19}\ \frac{\text{atomi}}{cm^3}$

$\Rightarrow (n\alpha)_{teoria} = 8.3\times10^{-24}\times(2.7\times10^{19}) = 0.00022$

L'esperimento



$V_{con\ lastra} = V_{senza\ lastra}/\epsilon_r \Rightarrow \epsilon_r = \frac{V_{senza}}{V_{con}} = 1.00026$

$\Rightarrow (n\alpha)_{sperim} = \epsilon_r - 1 = 0.00026$! ottimo accordo

He è più ~~grande~~ piccolo come R_{Bohr} $\rightarrow$ α è più ~~grande~~ piccolo di $(1.49\text{ volte})^3 = 3{,}29$

$\Rightarrow \alpha_{He} = \frac{\alpha_H}{3{,}29} \Rightarrow n\alpha_{He} = 0.0000669$ teoria

ϵ_r sperimentale $= 1.000068 \Rightarrow n\alpha_{He}(\text{sperim.}) = 0.000068$! Buon accordo

→ Rifare

ENERGIA DEL CAMPO (DIMOSTRAZIONE GENERALE)

(A) $U_{TOT} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} q_i \underbrace{\frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}}_{=\phi_j} \longrightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}\int_{\text{Volume spazio}} \rho\phi \, dV}$ $\qquad \rho \, dV = dq$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ allora $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\int_{\text{spazio}} -\epsilon_0 \nabla^2\phi \, \phi \, dV \qquad \phi\nabla^2\phi = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\phi$

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2$ Idem per $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ $\Rightarrow \phi\nabla^2\phi = \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\phi) - |\vec{\nabla}\phi|^2$

$\Rightarrow U = \underbrace{-\frac{1}{2}\epsilon_0\int_{\text{spazio}} \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\phi)\, dV}_{I^\circ \text{ integrale}} + \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_0\int_{\text{spazio}} |\vec{\nabla}\phi|^2 dV}_{II^\circ \text{ integrale}} \qquad |\vec{\nabla}\phi|^2 = \vec{E}\cdot\vec{E} = E^2$

(B) $\int_{\text{tutto lo spazio}} \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\phi)\, dV = \oint(\phi\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{dA}$ ↑ spazio — teorema di Gauss

poichè $\phi \propto \frac{1}{r}$ $\quad \vec{\nabla}\phi \propto \frac{1}{r^2}$ $\Rightarrow$ (o c'è anche più rapido come nei multipoli)

$\phi\vec{\nabla}\phi \propto \frac{1}{r^3}$ mentre la superficie va come r^2

$\Rightarrow$ l'integrale $\to 0$ quando vado all'∞ e integro su una superficie all'infinito

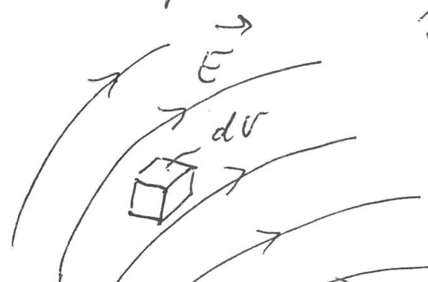
---

(C) $\Rightarrow U = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_{\text{tutto spazio}} E^2 dV \Rightarrow$ la densità u di energia (dU/dV) è

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\epsilon_0|\vec{E}|^2}$$

Il campo contiene energia. Un volume ΔV di spazio dove c'è un campo $\vec{E}(x,y,z)$ ha un'energia $\frac{\epsilon_0}{2}E^2(x,y,z)\Delta V$.

In un dielettrico $\boxed{u = \frac{1}{2}\epsilon_0 \frac{E^2}{\epsilon_r}}$



Infatti

In un condensatore $U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0$

Se stacco la batteria $U_0 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}$ → resta invariata $\Rightarrow$ con dielettrico $U = \frac{Q^2}{2\epsilon_r C_0} = \frac{U_0}{\epsilon_r}$

ESERCIZI DI ELETTROSTATICA

$\rho = \alpha r$

ⓐ Si calcoli la V tra O e un punto della superficie
$\alpha = \frac{3}{\pi} 10^{-4}\, C/m^4 \quad R = 10\, cm$

$\boxed{r<R}$ $\oint_{c.s.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{\int_0^r \rho\, dV}{\epsilon_0} \qquad dV = 4\pi r^2 dr$

$\Rightarrow \int_{\text{sfera di raggio } r} \rho\, dV = \int_0^r \alpha r\, 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha \frac{r^4}{4} = \pi\alpha r^4 \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \pi\alpha r^4/\epsilon_0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{in} = \frac{\alpha\pi r^2}{4\pi\epsilon_0}\hat{r}}$

$r>R \Rightarrow \oint_{c.s.} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \int_{\text{sfera di raggio } R} \rho\, dV / \epsilon_0 \Rightarrow \int_R \rho\, dV = \pi\alpha R^4 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{out} = \frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}}$

$V = \phi(O) - \phi(P) = \phi(0) - \phi(R) = \int_0^R \vec{E}_{in} \cdot d\vec{r} = \int_0^R \frac{\alpha\pi r^2}{4\pi\epsilon_0} dr = \frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^3}{3} = \underline{\underline{899 V}}$ * →

ⓑ Si calcoli la ϕ_{in} e ϕ_{out} - $r<R$ $\phi_{in}(r) = \underset{0}{\phi(\infty)} - \int_0^r \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\int_0^r \frac{\alpha\pi r^2}{4\pi\epsilon_0} dr$

$\Rightarrow \phi_{in}(r) = \frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3}{3} = \frac{\alpha r^3}{12\epsilon_0}$ Ma è sbagliato! È un errore comune! Se prendo $\phi(\infty)=0 \Rightarrow$ l'estremo è ∞!

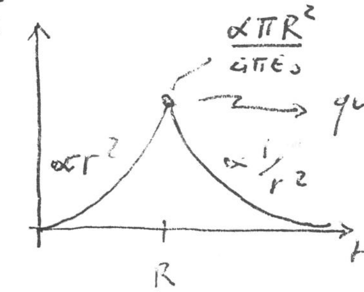
$\boxed{r<R}$ $\phi_{in}(r) = -\int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{r} = +\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^R E_{in} dr + \int_R^\infty E_{out} dr = \frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_r^R r^2 dr + \frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr$

$\phi_{in}(r) = \frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R^3}{3} - \frac{r^3}{3}\right] + \frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{\alpha\pi R^3}{3\pi\epsilon_0} - \frac{\alpha\pi}{12\pi\epsilon_0} r^3 = \frac{\alpha}{3\epsilon_0}\left[R^3 - \frac{r^3}{4}\right]$

$\boxed{r>R}$ $\phi_{out} = \int_r^\infty E_{out} dr = \frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{\overbrace{\alpha\pi R^4}^{=Q}}{4\pi\epsilon_0 r}$ $\left(= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ come deve essere}\right)$

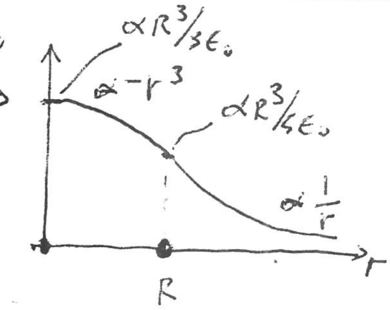
$\phi_{in}(R) = \frac{\alpha}{3\epsilon_0}\left[R^3 - \frac{R^3}{4}\right] = \frac{3\alpha R^3}{12\epsilon_0} = \frac{\alpha R^3}{4\epsilon_0} \qquad \phi_{out}(R) = \frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\alpha R^3}{4\epsilon_0}$ *

→



qui la $\frac{dE}{dr}$ cambia da positiva a negativa, vuol dire che c'è discontinuità nella carica.

qui $\frac{d\phi}{dr} = -E = 0$ →



Se avessi preso $\phi(0)=0$ cosa sarebbe successo?

$$\phi_{in}(r) = \phi(0) + \int_r^0 E\,dr = -\int_0^r E_{in}\,dr = \frac{-\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}\int_0^r r^2 dr = -\frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^3}{3} = -\frac{\alpha r^3}{12\epsilon_0} \quad r<R$$

$$\phi_{out}(r) = \phi(0) + \int_r^0 E\,dr = -\int_0^r E\,dr = -\int_0^R E_{in}\,dr - \int_R^r E_{out}\,dr = \quad \boxed{r>R}$$

$$= -\int_0^R \frac{\alpha\pi r^2}{4\pi\epsilon_0}dr - \int_R^r \frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = -\frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}\frac{R^3}{3} - \frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}R^4\left[\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right]$$

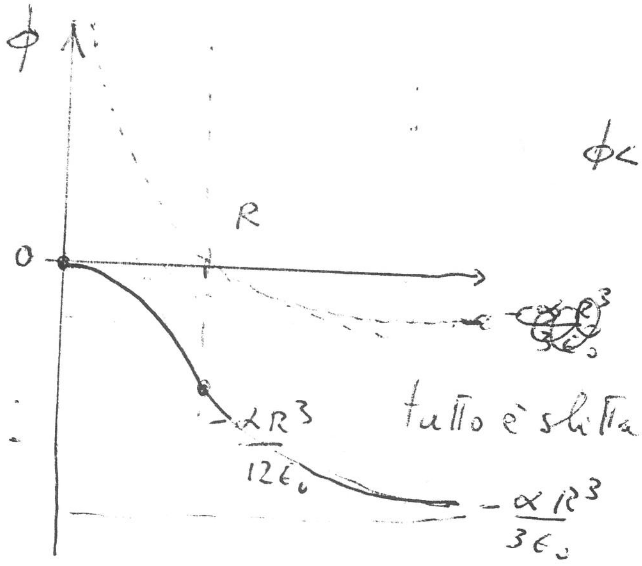
$$= -\frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}R^3\frac{4}{3} + \frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\alpha R^3}{4\epsilon_0}\left[-\frac{4}{3}+\frac{R}{r}\right]$$

per $r\to\infty$ $\phi(\infty) = -\dfrac{\alpha R^3}{3\epsilon_0}$

$\phi_{out}=0$ se $\dfrac{R}{r}=\dfrac{4}{3} \Rightarrow r=\dfrac{3}{4}R<R$

No perché $r>R$

e $\phi_{in}(R) = -\dfrac{\alpha R^3}{12\epsilon_0}$ $\quad \phi_{out} = \dfrac{\alpha R^3}{4\epsilon_0}\left[1-\dfrac{4}{3}\right] = -\dfrac{\alpha R^3}{12\epsilon_0}$



$\phi<0$ dappertutto

tutto è shiftato di $-\dfrac{\alpha R^3}{3\epsilon_0}$

$$V = \phi(0)-\phi(R) = 0-\left(-\frac{\alpha R^3}{12\epsilon_0}\right) = \frac{\alpha R^3}{12\epsilon_0} = 899\,V!!$$

Come prima!!

Si calcoli l'energia del sistema.

[illegible] A: C?ERI?IVO

$dU = dQ\,\phi(r)$

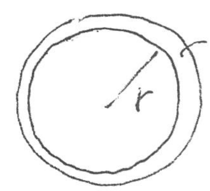
$dQ = \rho\,4\pi r^2 dr = \alpha r\,4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha r^3 dr$

$$dU = \phi_{in}(r)\,dQ = +\frac{\alpha}{3\epsilon_0}\left[R^3-\frac{r^3}{4}\right]4\pi\alpha r^3 dr \to \text{energia shell } dQ$$

$$U_{tot} = \int_{sfera} dU = \int_0^R \frac{4\pi\alpha^2}{3\epsilon_0}\left[R^3\int_0^R r^3dr - \frac{1}{4}\int_0^R r^6 dr\right] = \frac{4\pi\alpha^2}{3\epsilon_0}\left[\frac{R^7}{4}-\frac{R^7}{28}\right]$$

$$U_{tot} = \frac{\pi\alpha^2}{3\epsilon_0}R^7\left[1-\frac{1}{7}\right] = \frac{2\pi\alpha^2}{7\epsilon_0}R^7$$

Non è corretto! Infatti se stiamo costruendo la sfera il potenziale non è quello



$dQ = 4\pi\alpha r^3 dr$

Il potenziale rispetto a ∞ a cui si trova dQ vale

$$\phi(r) = \phi_{out}(R=r) = \frac{\alpha\pi r^4}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\alpha r^3}{4\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow dU = (dQ)\phi = 4\pi\alpha r^3 dr\,\frac{\alpha r^3}{4\epsilon_0} = \frac{\pi\alpha^2}{\epsilon_0} r^6 dr$$

$$\Rightarrow U_{TOT} = \frac{\pi\alpha^2}{\epsilon_0}\int_0^R r^6 dr = \frac{\pi\alpha^2}{7\epsilon_0}R^7$$

TODO B : CAMPO $\quad U_{TOT} = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_{V_\infty} E^2 dV = \frac{1}{2}\epsilon_0\int_0^R E_{in}^2\, 4\pi r^2 dr + \frac{1}{2}\epsilon_0\int_R^\infty E_{out}^2\, 4\pi r^2 dr$

$$U_{TOT} = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^R\left(\frac{\alpha\pi}{4\pi\epsilon_0}r^2\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\epsilon_0}{2}\int_R^\infty\left(\frac{\alpha\pi R^4}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$U_{TOT} = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\alpha^2\pi^2}{(4\pi)^2\epsilon_0^2}4\pi\int_0^R r^6 dr + \frac{\epsilon_0}{2}\frac{\alpha^2\pi^2R^8}{(4\pi)^2\epsilon_0^2}4\pi\int_R^\infty\frac{1}{r^2}dr$$

$$U_{TOT} = \frac{\alpha^2\pi}{8\epsilon_0}\frac{R^7}{7} + \frac{\alpha^2\pi R^8}{8\epsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{\alpha^2\pi R^7}{7\epsilon_0}$$ Come prima

---

ETODO C : OPERATIVO CON $\phi(0)=0$

Per una sfera di raggio r ho che $\phi(r) = -\frac{\alpha r^3}{12\epsilon_0}$

dall'∞ ad r $\quad dU = dQ\,\phi(\infty) - dQ\,\phi(r) = 4\pi\alpha r^3 dr\left(-\frac{\alpha R^3}{3\epsilon_0}\right) - 4\pi\alpha r^3 dr\left(-\frac{\alpha r^3}{12\epsilon_0}\right)$

$$U_{TOT} = -\int_0^R\frac{4\pi\alpha^2}{3\epsilon_0}r^6 dr + \frac{4\pi\alpha^2}{12\epsilon_0}\int_0^R r^6 dr = \left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)\frac{4\pi\alpha^2}{\epsilon_0}\frac{R^7}{7} = -\frac{\pi\alpha^2R^7}{7\epsilon_0}$$

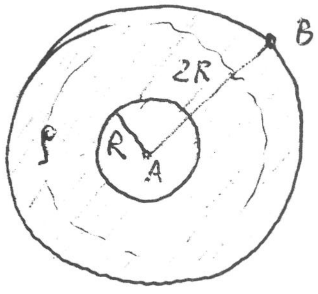
ETODO D :

$$U_{TOT} = \frac{1}{2}\int_{V_{sfera}}\rho\,\phi\, dV = \frac{1}{2}\int_0^R\alpha r\,(\phi_{in}(r))\,4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\alpha}{2}\int_0^R\phi\, r^3 dr$$

$$\phi_{in} = \frac{\alpha}{3\epsilon_0}\left[R^3 - \frac{r^3}{4}\right] \qquad U_{TOT} = \frac{4\pi\alpha}{2}\int_0^R\frac{\alpha}{3\epsilon_0}R^3 r^3 dr - \frac{4\pi\alpha}{2}\int_0^R\frac{\alpha}{3\epsilon_0}\frac{1}{4}r^6 dr$$

$$U_{TOT} = \frac{4\pi\alpha^2R^3}{6\epsilon_0}\frac{R^4}{4} - \frac{4\pi\alpha^2}{6\epsilon_0 4}\frac{R^7}{7} = \frac{\pi\alpha^2R^7}{6\epsilon_0}\left[1-\frac{1}{7}\right] = \frac{\pi\alpha^2}{7\epsilon_0}R^7$$ Come prima

$\rho = \text{cost}$ $\quad V_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = ?$



$r < R \quad E_1 = 0$

$R \le r \le 2R \quad \oint_{\text{shell}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi (r^3 - R^3)$

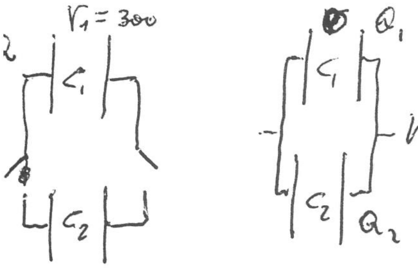
$$\Rightarrow E_2 = \frac{\rho\, \cancel{4\pi} (r^3 - R^3)}{\cancel{4\pi} r^2\, 3\epsilon_0} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \phi(A) - \phi(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2R} E\, dr = \int_0^R 0\, dr + \int_R^{2R} \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) dr$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_R^{2R} - R^3 \left[-\frac{1}{r}\right]_R^{2R}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left[\left(\frac{4R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) + \left(R^{\cancel{3}\,2}\frac{1}{2\cancel{R}} - R^{\cancel{3}\,2}\frac{1}{\cancel{R}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3}{2}R^2 - \frac{R^2}{2}\right) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} R^2$$

Un condensatore isolato $C_1 = 4\,\mu F$ fra le cui armature si misura una ddp $V_1 = 300$ Volts viene connesso in parallelo ad un condensatore $C_2 = 3\,\mu F$ inizialmente scarico. Determinare la ddp ai capi del sistema dei due condensatori e la variazione di energia elettrostatica.



$Q_1 + Q = Q$ $\quad$ (a) $\quad C_1 = \frac{Q}{V_1} \qquad C_1 + C_2 = \frac{Q}{V}$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2} = \frac{4}{4+3} \times 300 = 171 \text{ Volts (Cala!)}$$

(b) $\quad U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 \qquad U_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) V^2$

Ma $U_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} V_1^2 = U_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2}$

$$\Rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} - 1\right) U_1 = -\frac{C_2}{C_1 + C_2} U_1 = -\frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} V_1^2$$

Oppure direttamente $U_2 - U_1 = \frac{1}{2}(4+3)\times 10^{-6}(171)^2 - \frac{1}{2} 4 \times 10^{-6}(300)^2 = -7{,}7 \times 10^{-2}$ Joules

$= 0{,}102343 - 0{,}180000 = -7{,}7657 \times 10^{-2}$ (Volt)$^2 \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}}$

$U_2 < U_1$

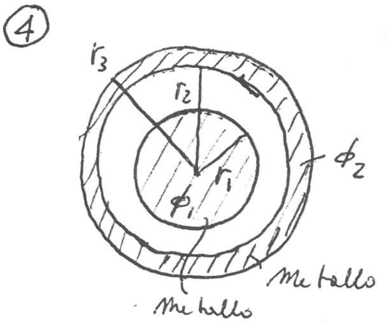
Se $C_1 = C_2 = C \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2} C V_1^2 \qquad U_2 = C V^2 \qquad V = V_1/2$

$$\Delta U = \frac{1}{2}(2C)V^2 - \frac{1}{2} C V_1^2 = \frac{1}{2} C [2V^2 - V_1^2] = \frac{C}{2}\left[2\frac{V_1^2}{4} - V_1^2\right] = -\frac{C V_1^2}{4}$$

$= -U_1/2$

Che fine fa l'energia ...

④



$\phi(\infty)=0 \quad \phi_1 = 27\,kV \quad \phi_2 = 9\,kV \quad r_1 = 10\,cm \quad r_2 = 15\,cm \quad r_3 = 20\,c$

$q_1 = ? \quad q_2 = ?$

I metalli hanno la superficie equipotenziale e anche dentro assume lo stesso valore. Quindi fra r_2 e r_3 il potenziale è ϕ_2, nonostante le cariche q_2 sono solo fuori.

$$\begin{cases} r < r_1 & E = 0 \\ r_1 < r < r_2 & \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q_1/\epsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \\ r_2 < r < r_3 & E = 0 \\ r > r_3 & \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = (q_1+q_2)/\epsilon_0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} \end{cases}$$

$$\phi_1 = \underset{0}{\underset{\|}{\phi(\infty)}} + \int_{r_1}^{\infty} E\,dr = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr + \int_{r_2}^{r_3} E\,dr + \int_{r_3}^{\infty} E\,d$$

$$\Rightarrow \phi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr + 0 + \phi_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] + \phi_2 \\ \phi_2 = \int_{r_3}^{\infty} E\,dr = \frac{q_1+q_2}{4\pi\epsilon_0 r_3} \end{cases}$$

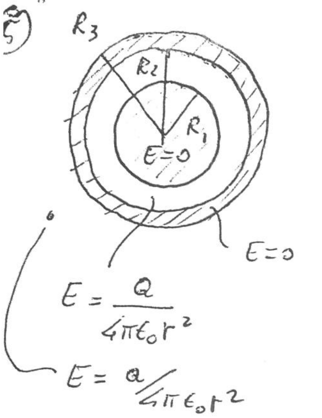
Abbiamo due eq. due incognite

$$\Rightarrow q_1 = 4\pi\epsilon_0(\phi_1 - \phi_2)\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{1}{9\times 10^9}(27-9)10^3\,\frac{0.1\times 0.15}{0.15-0.1} = \frac{\cancel{18}^{2}\times 10^{\cancel{3}}}{\cancel{9}\times 10^{\cancel{9}\,6}}\,\frac{0.015}{0.05} = 6\times 10^{-7}\,C$$

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 r_3 \phi_2 - q_1 = \frac{1}{9\times 10^{\cancel{9}\,6}}\times 0.2\times \cancel{9}\times 10^{\cancel{3}} - 6\times 10^{-7} = -4\times 10^{-7}\,C.$$

---

5)



Calcolare la variazione percentuale del potenz. della sfera R_1 quando questa viene circondata da una buccia sferica, conduttrice neutra di raggi R_2 ed R_3 concentrica. ($R_1 = 1\,cm$, $R_2 = 4\,cm$; $R_3 = 5\,cm$)

La sfera isolata ha $\phi_{isolata} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1}$

" " circondata ha potenziale $\phi = \int_{R_1}^{\infty} E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr + \int_{R_2}^{R_3} E\,dr + \int_{R_3}^{\infty} E\,dr$

$$\Rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}dr + 0 + \int_{R_3}^{\infty}\frac{1}{r^2}dr\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right] = \phi_{isolata} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right] < \phi_{isolata}$$

Il potenziale cala

$$\Rightarrow \frac{\phi - \phi_{isolata}}{\phi_{isolata}} = \frac{-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3}\right]}{Q/4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{R_1}{R_2 R_3}(R_3 - R_2) = -5\%$$

Quanto vale il potenziale del guscio?

$$\phi_{\substack{guscio\\est.}} = \int_{R_2}^{\infty} E\,dr = \int_{R_2}^{R_3} 0\,dr + \int_{R_3}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

Ma il nuovo ϕ non è $\phi_{isolata} + \phi_{guscio}$ bensì $\phi_{isolata} + \phi_{guscio} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$

Infatti il conduttore a guscio è neutro e si induce una carica interna $-Q$ ed esterna $+Q$ $\Rightarrow$ e il potenz. della carica $-Q$ è proprio $-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}$. Poiché i pot. si sommano $\phi = \phi_{isolata} + \phi_{guscio\,int.} + \phi_{guscio\,esterno}$

) Due sfere conduttrici A e B uguali ed aventi raggi ~~r~~ $r = 1\,cm$ sono poste nel vuoto con i centri a distanza $d = 1\,m$ ~~cm~~. Inizialmente le due sfere sono isolate e cariche ciascuna con la carica $Q = 10^{-8}C$. Successivamente

a) si collega la sfera A a Terra e si aspetta l'equilibrio

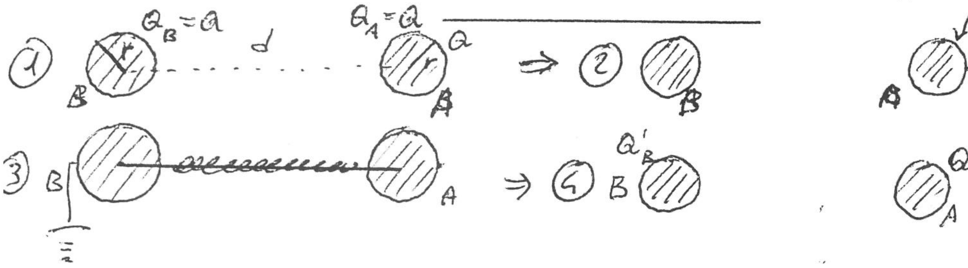
b) si interrompe il collegamento a terra

c) si collega la sfera B a Terra e si aspetta ~~da~~ l'equilibrio

d) si interrompe il collegamento a terra.

Calcolare la carica posseduta da ciascuna sfera alla fine delle operazioni ($d >> r$)

$\phi_A + \phi_B(A) = \phi_{terra} = 0$



$Q_A = Q \quad Q'_A = ?$

$Q_B = Q \quad Q'_B = ?$

Dopo il passaggio a il poten. totale della sfera A è $\phi_A = 0$. Ma il potenziale di A è dato dal poten. della sfera B in A + quello ~~della~~ potenziale dovuto alla nuova carica

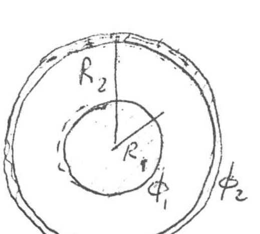
$$\frac{Q'_A}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 d} = 0 \Rightarrow Q'_A = -Q\frac{r}{d} = -10^{-10}C \text{ è negativa}$$

dopo c)

$$\frac{Q'_B}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q'_A}{4\pi\epsilon_0 d} = 0 \Rightarrow Q'_B = -Q'_A\frac{r}{d} = Q\left(\frac{r}{d}\right)^2 = 10^{-12}C \text{ è positiva}$$

Poichè $d >> r$ non discutiamo fenomeni di induzione.

Ad un condensatore sferico, nel vuoto, è applicata una ddp $V = 100\,Volts$. Il raggio dell'armatura esterna è $R_2 = 10\,cm$. Calcolare il valore del raggio R_1 dell'armatura interna che rende minimo il valore del campo elettrico nelle immediate vicinanze dell'armatura stessa. Calcolare anche il valore di tale campo elettrico.

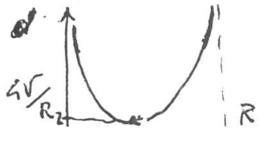


$V = \phi_1 - \phi_2 = 100\,Volts$

Aumento ~~Riduco~~ R_1? Sì ma cambia $Q \Rightarrow E(R_1) = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1^2}$ Potrebbe non diminuire

~~Infatti~~ $Q = CV$ poichè $V = cost = 100\,Volts$ se aumento ~~riduco~~ la distanza fra le armature $C\downarrow$ e $Q\downarrow$. Quindi riduco $R_1 \Rightarrow C\downarrow \Rightarrow Q\downarrow$ ma $\frac{1}{R_1^2}\uparrow$ quindi c'è un equilibrio per cui $dE/dR_1 = 0$ E è minimo.

$$Q = C\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1} \Rightarrow E(R_1) = \frac{CV}{4\pi\epsilon_0 R_1^2} = \frac{\cancel{R_1}R_2V}{R_1^{\cancel{2}}(R_2 - R_1)}$$



$dE/dR_1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1 = R_2/2$

$E(R_1) = \frac{R_2 V}{...} \quad 4V \quad 4\times100 \quad ...$

TABELLA RIASSUNTIVA

$$\underbrace{\oint_{sc} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{\sum_i Q^i_{in}}{\epsilon_0}}_{\text{Vale sempre}} \quad (1) \qquad \underbrace{\oint_{loop} \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0 \quad (2) \qquad \vec{F} = q\vec{E} \quad (3)}_{\text{Vale per } \partial\vec{B}/\partial t = 0} \qquad \vec{E}_{TOT} = \sum_i \vec{E}_i \quad (4)$$

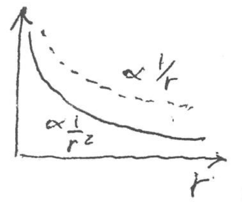
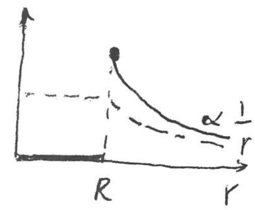
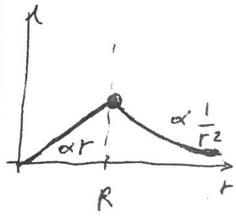
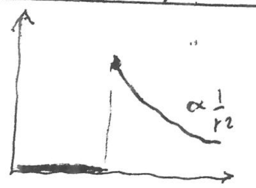
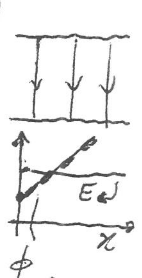
→ Leggi dell' Elettrostatica.

CONSEGUENZE

(2) $\Rightarrow \exists\, \phi(P)$ t.c. $\phi(P) = \phi(P_0) + \int_P^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \quad \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = \Delta\phi$

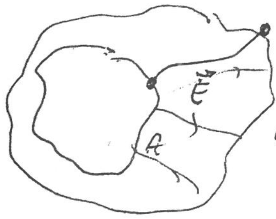
(4) $\Rightarrow \vec{F}_{TOT} = q\vec{E}_{TOT} = \sum_i q\vec{E}_i = \sum_i \vec{F}_i \quad \phi_{TOT} = \sum_i \phi_i(P) \quad \phi(\infty) = 0$ (in genere)

ESEMPI E CASI

	CARICA	GUSCIO DI RAGGIO R	SFERA DI RAGGIO R	METALLO	CONDENS
CAMPO	$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ $\forall r \neq 0$	$r < R$ $E = 0$, $r \geq R$ $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$	$r < R$ $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$ $r \geq R$ $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$	DENTRO $E = 0$ SULLA SUPERFICIE $E \perp$	Fuori $E = 0$ Dentro $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
POTENZIALE	$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ $\forall r \neq 0$	$r < R$ $\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$ $r \geq R$ $\phi = q/4\pi\epsilon_0 r$	$r < R$ $\phi =$ $r \geq R$ $\phi =$	DENTRO $\phi = cost$ SULLA SUPERF $\phi = cost$	Fuori $\phi = cost$ $\phi = Ex + \phi_A$
~~LINEE DI CAMPO~~ GRAFICI — E ---- ϕ				 CASO SFERICO	

COME CALCOLO LA V DI UN CONDENSATORE?

$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ per un cond. piano



$V = \phi_A - \phi_B = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$

DIPOLI E POLARIZZAZIONE

$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E} \equiv \frac{N}{V}\vec{p}$

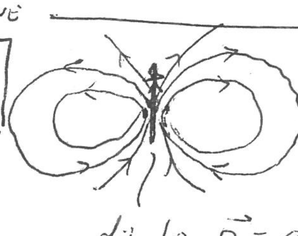
$\vec{p} = \alpha\,\epsilon_0\vec{E}$

$\chi = \frac{N}{V}\alpha = n\alpha$

$\alpha = 4\pi R^3_{Bohr}$

$\boxed{P = \sigma_{indotta}}$

$\boxed{\vec{P} \propto \vec{E}}$

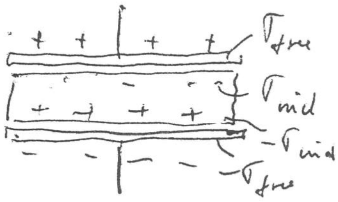


$E \propto \frac{1}{r^3}$

$\phi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2}$

dipolo $\vec{p} = q\vec{d}$

$\phi_{TOT} \simeq \phi_{MONOP} + \phi_{DIPOLO} + \phi_{QUADRUPOLO}$



$E = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_{ind}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0} - \frac{\chi\epsilon_0 E}{\epsilon_0}$

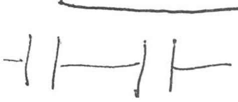
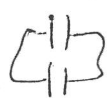
$\Rightarrow E(1+\chi) = \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0} = E_{free} \qquad E = \frac{E_{free}}{\epsilon_r} \qquad \boxed{\epsilon_r = 1 + \chi}$

$\Rightarrow V = Ed = \frac{E_{free}\, d}{\epsilon_r} = \boxed{\frac{V_{free}}{\epsilon_r}}$

ϵ_r = cost dielettr. relativa ≥ 1

$\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ = cost dielettrica del mezzo

$\boxed{C = \frac{\epsilon_0\epsilon_r A}{d}}$ in presenza di un dielettrico

 $\frac{1}{C_{eq}} = \sum_i \frac{1}{C_i}$  $C_{eq} = \sum_i C_i$