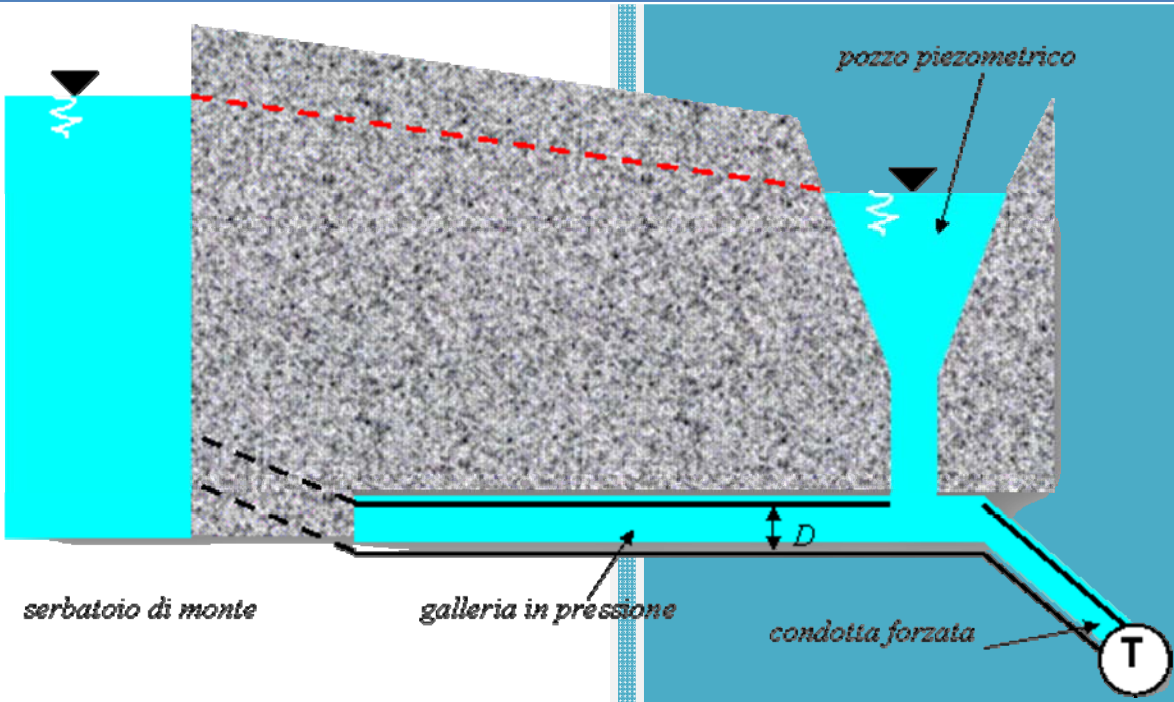
Moto vario nelle correnti in pressione



A cura del prof. ing. G.R.Tomasicchio

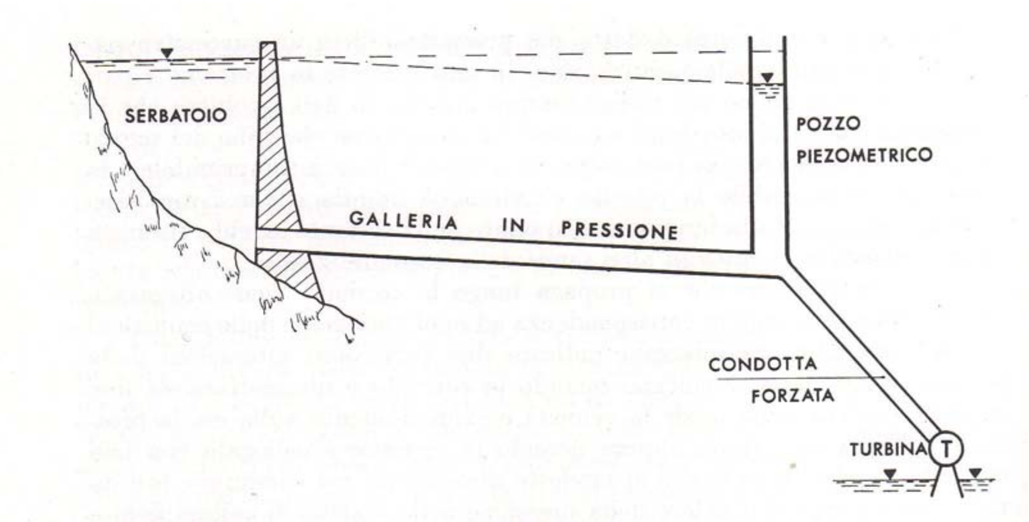
MOTO VARIO NELLE CORRENTI IN PRESSIONE

I processi di moto vario, generalmente, sono generati da una variazione di portata conseguente alla messa in funzione di un organo regolatore posto in una sezione della condotta. Ciò che caratterizza tale tipo di moto è la variazione nel tempo e da sezione a sezione delle caratteristiche della corrente e cioè pressione, velocità e portata. La trattazione viene fatta prescindendo dalla conoscenza puntuale delle caratteristiche idrauliche; la corrente viene studiata facendo riferimento alle caratteristiche globali quali portata Q, sezione trasversale A, velocità media V = Q/A. Inoltre, poiché la corrente viene considerata lineare, a tutti i punti di una sezione trasversale corrisponde un unico valore della quota piezometrica. Nel moto vario, altra caratteristica, sono presenti scambi di energia meccanica tra le diverse parti del liquido, e si può anche avere una linea dei carichi totali ascendente nel senso del moto. Tale comportamento anomalo del'andamento della linea dei carichi totali viene giustificato se si fa riferimento all'intera massa liquida interessata dal movimento. Si è detto che il processo di moto vario è innescato da una variazione di portata in una certa sezione; tale variazione di portata si trasmette alle sezioni adiacenti sotto forma di un'onda di pressione. Una sezione raggiunta da tale onda subisce una variazione dei valori della pressione che a sua volta genera una compressione o una dilatazione della massa liquida. La velocità con cui si propaga l'onda, o *celerità dell'onda*, è pari alla velocità del suono nel mezzo liquido delimitato dall'involucro che lo contiene e quindi risulta funzione delle caratteristiche elastiche del fluido stesso e dell'involucro. Se il liquido è considerato incomprimibile e la tubazione è ipotizzata rigida, la celerità assume valore infinito.

Un caso tipico in cui si hanno situazioni di moto vario è un ***impianto di produzione di forza motrice***. Tale impianto è costituito da un serbatoio di grossa capacità, una galleria in pressione, un pozzo piezometrico, una condotta forzata e un organo regolatore della portata avviata alle turbine.

La perturbazione che nasce dalla regolazione della portata determina variazioni di pressione e velocità che risalgono la corrente verso monte raggiungendo il pozzo piezometrico; questo ha l'effetto di mantenere costante la pressione nella sezione iniziale della condotta, dunque la sovrappressione si annulla e si genera una nuova perturbazione viaggiante verso l'estremità di valle della condotta; il suo passaggio annulla i valori di sovrappressione presenti lungo il percorso.

In corrispondenza dell'otturatore la perturbazione subirà una nuova riflessione. I tempi di percorrenza della condotta da parte della perturbazione sono confrontabili con i tempi di manovra dell'organo regolatore, dunque nello studio si deve tenere conto del reale valore della celerità senza prescindere dall'elasticità di volume del liquido e dalla deformabilità della tubazione. Il processo descritto viene detto *colpo d'ariete.* Il fenomeno di colpo d'ariete è contraddistinto da alte dissipazioni derivanti dalle trasformazioni di energia molto frequenti; quindi l'intensità maggiore del fenomeno e le sovrappressioni di massima, che interessano particolarmente per il campo applicativo, si verificano a breve distanza di tempo dall'inizio della manovra di regolazione e finché la lunghezza della condotta è limitata. Quando nella condotta forzata si è stabilita la nuova situazione di regime, nella galleria in pressione si hanno ancora le condizioni di moto iniziali. Per tale motivo il pozzo piezometrico viene ad assumere una funzione di compenso cedendo o accogliendo la differenza tra la portata della galleria e la portata della condotta. In tal caso, poiché le oscillazioni nel pozzo sono lente, i tempi di propagazione delle perturbazioni nella galleria possono essere considerati piccolissimi; ciò indica che la celerità può essere considerata infinita, dunque in tal caso possiamo considerare il liquido incomprimibile e la tubazione rigida (*oscillazione di massa*). Lo studio analitico del moto vario viene condotto facendo riferimento all'equazione del moto a cui si aggiungono l'equazione di continuità per una corrente, le relazioni A = A(p)



(definisce la deformabilità della condotta) e ρ = ρ(p), e le condizioni al contorno. L'equazione del moto ha la forma, per moto vario e perdite continue lungo la condotta:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{v^2}{2g}\right)+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}=-\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}-J$$

(Per un fluido comprimibile $\gamma = \gamma(p,s)$); ma

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\frac{p}{\gamma}+\frac{p}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial s}$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}\right)+\frac{p}{\gamma^2}\frac{\partial \gamma}{\partial s}+\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial t}+J=0$$

avendo assunto s concorde con la direzione del moto. L'equazione di continuità (sempre per liquido comprimibile) ha la forma :

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s}+\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}=0$$

ma posto Q = V·A e tenendo presente che ρ ed A dipendono dal tempo al variare della pressione si ha:

$$V\frac{\partial(\rho A)}{\partial s}+\rho A\frac{\partial V}{\partial s}+\left(\rho\frac{dA}{dp}+A\frac{d\rho}{dp}\right)\frac{\partial p}{\partial t}=0$$

Le due equazioni si semplificano tenendo conto che:

- la velocità media della corrente è generalmente piccola, dunque $V^2/2g$ assume piccoli valori;
- le perdite per condotte non molto lunghe possono essere trascurate ($J \cong 0$);
- il modulo di elasticità di volume del liquido ε può essere ritenuto costante al variare della pressione;
- $\frac{\partial \rho}{\partial s}$ e $\frac{\partial A}{\partial s}$ sono ritenuti nulli

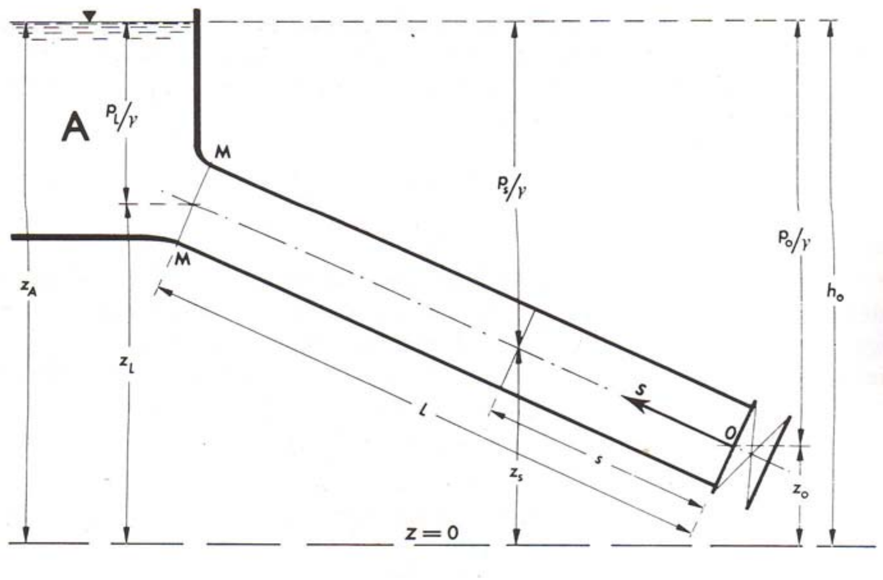
Posta la quota piezometrica $h = z + \frac{p}{\gamma}$, le due equazioni precedenti assumono la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial s} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = \gamma\left[\dfrac{1}{A}\dfrac{dA}{dp} + \dfrac{1}{\varepsilon}\right]\dfrac{\partial h}{\partial t} \end{cases}$$

avendo chiamato $\varepsilon = \rho\frac{dp}{d\rho}$ modulo di elasticità di volume del liquido e avendo assunto quale verso positivo delle ascisse s quello contrario alla direzione del moto permanente.

MANOVRE ISTANTANEE ALL'OTTURATORE

Consideriamo un serbatoio da cui si origina una condotta; supponiamo che in essa le perdite siano nulle e l'altezza cinetica trascurabile sicché la piezometrica e la linea dei carichi totali siano coincidenti tra loro e con l'orizzontale alla quota del pelo libero. All'estremità di valle della condotta si trovi un otturatore; la velocità per regime di moto permanente sia V_0.



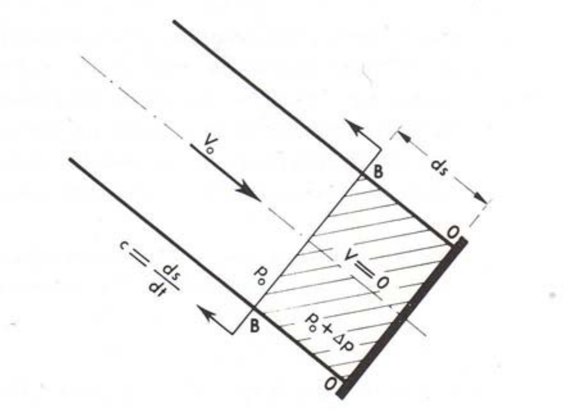
Una chiusura brusca dell'otturatore che azzeri la velocità genera una sovrappressione Δp che viaggerà sotto forma di onda verso l'imbocco della condotta. Ad un certo istante dt (contato a partire dalla chiusura) l'onda avrà coperto una distanza ds dunque una porzione di corrente sarà in quiete e sarà sottoposta ad una sovrappressione Δp che comprimerà il liquido riducendone il volume. Il teorema degli impulsi indica che la variazione di quantità di moto subita dalla massa ρAds , $\rho A V_0 ds$ deve eguagliare l'impulso delle forze agenti sulla stessa massa, AΔpdt ; da questa uguaglianza si ottiene :

$$\Delta p = \rho \frac{ds}{dt} V_0$$

Da cui, posto $c = \frac{ds}{dt}$ si ha in definitiva:

$$\Delta p = \rho c V_0$$

Quindi la chiusura dell'otturatore ha generato un'onda che crea una sovrappressione Δp e viaggia con velocità c verso l'imbocco; questo viene raggiunto all'istante $t_1 = \frac{L}{c}$ con L lunghezza della condotta. All'imbocco la sovrappressione viene annullata e si genera una perturbazione diretta verso l'otturatore, al cui passaggio il liquido assume velocità $-V_0$ diretta verso l'imbocco. La perturbazione raggiunge l'otturatore all'istante $t_2 = \frac{2L}{c}$ (termine del primo ritmo); qui la velocità subisce un nuovo azzeramento e si genera un abbassamento della pressione pari a $-\rho c V_0$. Tale nuova onda di perturbazione viaggerà verso l'imbocco.



ESPRESSIONE DELLA CELERITA'

Ora pare opportuno determinare l'espressione della celerità con cui si muove l'onda di perturbazione all'interno della corrente; per far ciò consideriamo le condizioni più generali di condotta deformabile e liquido comprimibile. Si abbia la perturbazione che nel tempo dt percorre una distanza ds, dunque il volume W di liquido contenuto nel tronco di lunghezza ds subisce una diminuzione di volume $dW_1 = -\frac{W \Delta p}{\varepsilon}$ con ε modulo di elasticità di volume del liquido; l'aumento di pressione Δp genera anche una dilatazione della tubazione che rende un aumento di volume disponibile dW_2 dato da

$$dW_2 = \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dp}} \Delta \mathrm{p}\, \mathrm{ds} = \rho \mathrm{c} \mathrm{V_0} \frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dp}} \mathrm{ds}$$

Dove la derivata $\frac{\mathrm{dA}}{\mathrm{dp}}$ è una funzione delle caratteristiche geometriche ed elastiche della condotta e determina il segno di questa espressione in forma generale. Nello stesso tempo dt giunge il liquido che viaggia ancora in condizione di regime e che riduce il volume W = A·ds di un volume dW dato da dW = $-AV_0dt$. Dall'uguaglianza dei volumi si ottiene

$$AV_0 dt = \frac{A\rho c V_0}{\varepsilon} ds + \rho c V_0 \frac{dA}{dp} ds$$

da cui, essendo c = $\frac{ds}{dt}$, si ricava

$$\frac{1}{c^2} = \rho \left[\frac{1}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{1}{\varepsilon}\right]$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho \left[\frac{1}{A}\frac{dA}{dp} + \frac{1}{\varepsilon}\right]}$$

Questa espressione per $\frac{dA}{dp}$ =0 (tubazione rigida) dà il risultato $c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$ che tiene conto della sola comprimibilità del fluido (per acqua a 8°C $c \cong 1400$ m/s). Il sistema di equazioni differenziali del moto vario diventa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial s} = \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = \dfrac{g}{c^2}\dfrac{\partial h}{\partial t} \end{cases}$$

con s positivo se contrario alla direzione del moto permanente. Questo è un sistema di due equazioni alle derivate parziali detto *della corda vibrante*; la sua integrazione da

$$h - h_0 = F(s - ct) + f(s + ct)$$ soluzione di D'Alembert

$$V_0 - V = \frac{g}{c}[F(s - ct) - f(s + ct)]$$

Le funzioni F ed f rappresentano due azioni vibratorie, l’una, F, di *colpo diretto* (parte dall’otturatore e va verso l’imbocco), l’altra, f, di *contraccolpo* (va dall’imbocco verso l’otturatore); l’una positiva e l’altra negativa, ciascuna procede inalterata da un estremo all’altro della condotta. La sovrapposizione degli effetti delle due onde determina, in ogni istante, la pressione e la velocità in un qualsiasi punto della condotta. L’uso delle due equazioni differenziali è subordinato alla conoscenza dei valori assunti dalle funzioni F e f. A questo proposito si possono fare alcune considerazioni che semplificano la trattazione. L’estensione notevole del serbatoio di alimentazione impone che all’imbocco non si possono verificare pressioni diverse da quelle di regime P_0 da cui la

$$\Delta h = h - h_0 = F(s - ct) + f(s + ct) = 0$$

cioè per s = l

$$F(l - ct) = -f(l + ct)\ , \qquad \forall\, t$$

Ciò significa che quando l’onda di perturbazione F giunge all’imbocco nasce contemporaneamente un’onda di perturbazione di uguale valore assoluto ma di segno opposto che si propaga verso l’otturatore. Estendendo il ragionamento ad una sezione generica di ascissa s si può dire che i valori di f in tale sezione sono uguali e di segno contrario a quelli che la F vi ebbe tanto tempo prima quanto ne è occorso perché la vibrazione da s raggiungesse l’imbocco e poi fosse riflessa in s

$$f(s + ct) = f(l + ct_1) = -F(l + ct_1) = -F(s + ct_2)$$

$$t_1 = t - \frac{(l-s)}{c} \qquad\qquad t_2 = t_1 - \frac{(l-s)}{c} = t - \frac{2(l-s)}{c}$$

$$f(s + ct) = -F\left[s - c\left(t - \frac{2(l-s)}{c}\right)\right]$$

Dunque

$$h - h_0 = F(s - ct) - F[s - c(t - \tau_s)]$$

$$V_0 - V = \frac{g}{c}[F(s - ct) + F[s - c(t - \tau_s)]]$$

con

$$\tau_s = \frac{2(l-s)}{c}$$

FASE DI COLPO DIRETTO

La perturbazione originata dall'operazione di manovra all'otturatore raggiunge l'imbocco dopo un tempo $\frac{l}{c}$ e la sezione generica di ascissa s dopo un tempo $\frac{(2l-s)}{c}$. Entro questi limiti di tempo ($t < \frac{(2l-s)}{c}$ per la sezione generica) il fenomeno è retto solo dai primi termini dei secondi membri delle equazioni. Quindi

$$\begin{array}{l} \Delta h = F(s-ct) \\ \Delta V = \frac{g}{c}F(s-ct) \end{array} \Rightarrow \Delta h = \frac{c}{g}\Delta V \Rightarrow \Delta p = \rho c \Delta V$$

FASE DI CONTRACCOLPO

La fase di contraccolpo è la fase successiva a quella di colpo diretto; in essa si ha la sovrapposizione delle diverse onde di pressione che si propagano nei due sensi lungo la condotta. Per lo studio di tale fase ci si riferisce alle due equazioni

$$h - h_0 = F(s-ct) - F[s - c(t-\tau_s)]$$

$$V_0 - V = \frac{g}{c}[F(s-ct) + F[s-c(t-\tau_s)]]$$

la cui definizione comporta l'esplicitazione della funzione F. Tale esplicitazione da luogo alle equazioni *"concatenate"* di Allievi.

Diciamo t_1 un istante t.c. $t_1 < \tau_0 = \frac{2l}{c}$ (2l/c ritmo della condotta o durata della fase) ed indichiamo con

F_1 il valore assunto da F per s=0 nell'istante t_1;

F_2 il valore assunto da F per s=0 nell'istante $t_1 + \tau_0$;

F_3 il valore assunto da F per s=0 nell'istante $t_1 + 2\tau_0$;

…..

Le equazioni si scrivono (ad s=0):

$$h_1 - h_0 = F_1 \qquad\qquad V_0 - V_1 = \frac{g}{c}F_1$$

$$h_2 - h_0 = F_2 - F_1 \qquad\qquad V_0 - V_2 = \frac{g}{c}(F_2 + F_1)$$

$$h_3 - h_0 = F_3 - F_2 \qquad\qquad V_0 - V_3 = \frac{g}{c}(F_3 + F_2)$$

.....

Da queste si ricava il sistema

$$h_1 - h_0 = \frac{c}{g}(V_0 - V_1)$$

$$h_2 - h_0 = -(h_1 - h_0) + \frac{c}{g}(V_1 - V_2)$$

$$h_3 - h_0 = -(h_2 - h_0) + \frac{c}{g}(V_2 - V_3)$$

.....

che si risolve partendo dalla prima equazione e ritenendo nota una legge di chiusura dell'organo di regolazione (s=0)

CHIUSURA TOTALE LENTA – FORMULA DI ALLIEVI-MICHAUD

La più semplice è quella di ammettere una variazione lineare della velocità nel tempo T_c, da V_0 a 0, con la legge

$$V = V_0\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)$$

$\boxed{T_c > \tau_0}$ *chiusura lenta*

(ipotesi di variazione lineare della velocità $\frac{V_0 - V}{V_0} = \frac{t}{T_c}$)

In questo caso la prima equazione fornisce al termine del 1° ritmo (di tempo $t_r = \frac{2l}{c}$)

$$h_1 - h_0 = \frac{c}{g}\left[V_0 - V_0\left(1 - \frac{t_r}{T_c}\right)\right] = \frac{2lV_0}{gT_c}$$

La seconda equazione fornisce, alla fine del 2° ritmo

$$h_2 - h_0 = -(h_1 - h_0) + \frac{c}{g}(V_1 - V_2) =$$

$$= -\frac{2lV_0}{gT_c} + \frac{c}{g}\left[V_0\left(1 - \frac{t_r}{T_c}\right) - V_0\left(1 - \frac{2t_r}{T_c}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2lV_0}{gT_c} + \frac{c}{g}\frac{V_0 t_r}{T_c} = 0$$

La terza equazione fornisce, alla fine del 3° ritmo

$$h_3 - h_0 = -(h_2 - h_0) + \frac{c}{g}(V_2 - V_3) =$$

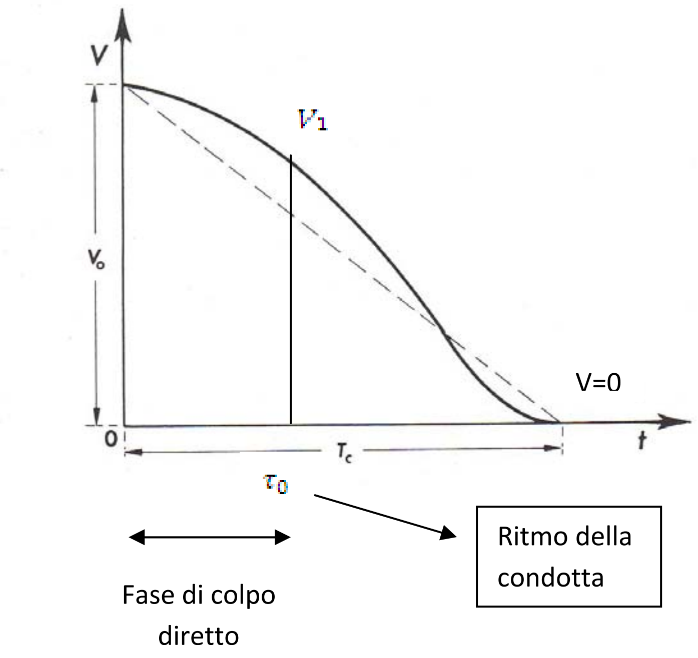
$$= -0 + \frac{c}{g}V_0\left[\left(1 - \frac{2t_r}{T_c}\right) - \left(1 - \frac{3t_r}{T_c}\right)\right] = \frac{2lV_0}{gT_c}$$

e così alternativamente si ha una sovrapposizione massima (formula di Allievi-Michaud) all'otturatore

$$h_i - h_0 = \frac{2lV_0}{gT_c}$$

Alla fine del 1°, 3°, 5°…. ritmo e un valore nullo della sovrappressione alla fine del 2°, 4°, 6°…. ritmo. Tale valore di sovrappressione è sempre inferiore a quello $\rho c V_0$ che si verifica in tutte le manovre con $T_c < \tau_0$ (*chiusura totale brusca*)

Nella realtà io opero una chiusura lineare dell'otturatore a cui non corrisponde una variazione lineare della V. La formula di Allievi-Michaud è approssimata per eccesso. Infatti nella realtà, pur con una variazione lineare con il tempo del grado di chiusura η, la velocità V nella sezione di sbocco presenta l'andamento continuo in figura, come risulta ricordando che $\frac{V}{V_0} = \eta\sqrt{\frac{h}{h_0}}$;ciò comporta per la differenza V_0-V_1 (alla quale h_{max}-h_0 è proporzionale) un valore inferiore a quello considerato.



N.B.: Per la sezione di sbocco

$$\frac{V}{V_0} = \eta\sqrt{\frac{h}{h_0}}$$

Ove

$$\eta = \eta(t) = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Se volessi (per η(t) lineare) V(t) lineare dovremmo avere $\frac{h}{h_0}$ costante (che non può essere)

Schematizzando l'otturatore come una luce in parete sottile:

$$Q_0 = V_0\Omega_0 = m\omega_0\sqrt{2gh_0}$$

$$Q = V\Omega_0 = m\omega\sqrt{2gh}$$