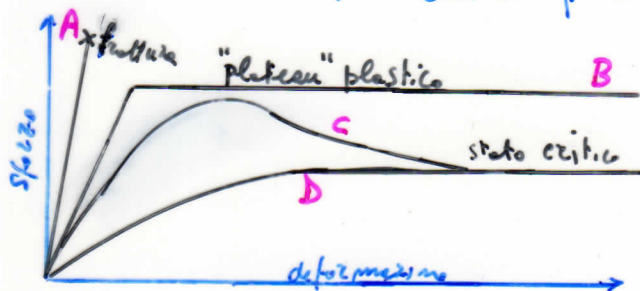


TEOREMI DEL LIMITE INFERIORE E DEL LIMITE SUPERIORE

[Soluzioni prudentziali (safe) e non prudentziali (unsafe)]

Nella soluzione di problemi usando metodi basati sull'elasticità, si fa uso delle condizioni di equilibrio (di forze e tensioni), di compatibilità (di deformazioni e spostamenti) e della relazione sfuerzo-deformazione del materiale. (Se il problema può essere risolto usando le sole condizioni di equilibrio, esso è detto essere - em'è noto - staticamente determinato).

L'analisi rigorosa di strutture in terra (fondazioni, pendii e opere di sostegno) a collasso è, invece, basata sui teoremi dei limiti inferiore e superiore della plasticità. A rigore, questi teoremi si applicano a materiali perfettamente plastici, la cui relazione sforzo-deformazione esibisce un "plateau" plastico, vale a dire assenza di fragilità o di decremento di resistenza al procedere della deformazione oltre il punto di rottura. In meccanica del terreno, ciò suggerirebbe lo uso di resistenze di stato critico piuttosto che di picco.



A: GHISA

B: ACCIAIO DOLCE

C: Sabbia densa e argilla sovrasaturate

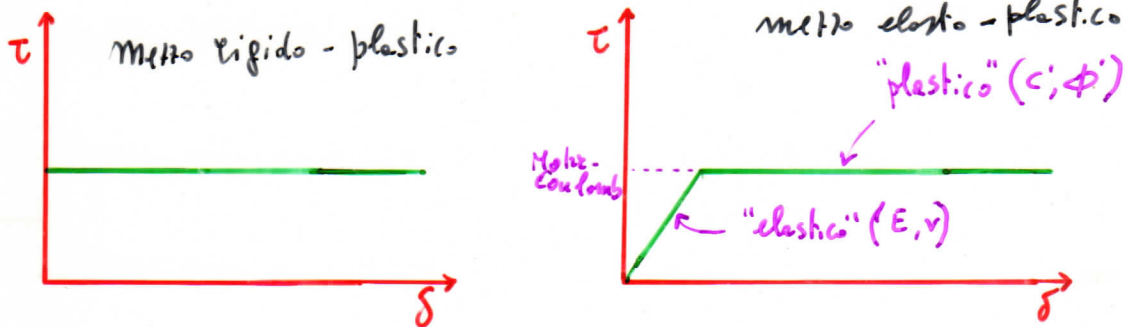
D: Sabbia sciolta e argilla non saturate.

Una soluzione di limite inferiore (prudentziale) soddisfa le condizioni di equilibrio ed una condizione basata su proprietà del materiale (= non violazione del criterio di rottura), analoga alla relazione sforzo-deformazione in un'analisi elastica.

Una soluzione di limite superiore (non prudentziale) implicante un meccanismo cinematicamente ammissibile soddisfa un criterio basato sullo spostamento, che è analogo alla compatibilità.

Il mezzo plastico perfetto

Il modello di mezzo plastico perfetto descrive il comportamento di un materiale ideale in grado di assorbire le sollecitazioni esterne sino ad un limite fisso, prima del quale la deformazione è nulla (oppure solo elastica) ed oltre il quale si ha scorrimento indefinito.



I teoremi fondamentali della plasticità perfetta

In generale, la risoluzione del problema plastico perfetto richiede che siano soddisfatte:

- le equazioni di equilibrio,
- le equazioni di compatibilità e
- le leggi costitutive del materiale nel rispetto del criterio di resistenza e le condizioni al contorno.

Le difficoltà connesse con l'analisi dell'equilibrio plastico sono talvolta considerabili ed il procedimento generale può non risultare agevole. La teoria della plasticità perfetta consente, tuttavia, di superare tale inconveniente attraverso l'impiego di due teoremi fondamentali che conducono a delle soluzioni approssimate, ancorché di notevole importanza ai fini applicativi.

Per ogni assegnato problema, è possibile determinare due soluzioni distinte, che soddisfano entrambe le condizioni di plasticità, ma tali che la prima, detta soluzione statica, rispetta solo la condizione di equilibrio, mentre la seconda, detta soluzione cinematica, rispetta solo quella di compatibilità.

Le due soluzioni, che derivano dall'applicazione del principio dei lavori virtuali ai sistemi continui, sono approssimate, ma teoricamente corrette. Esse sono, in generale, diverse tra loro e definiscono una banda entro cui si colloca la soluzione esatta.

Quando i due teoremi fornissero la medesima soluzione, si è in presenza della soluzione esatta (rispetto delle condizioni di equilibrio e di compatibilità).

Il primo teorema della plasticità, detto teorema del limite inferiore, stabilisce che i valori delle forze esterne ^[cioè: carichi esterni e forze di massa (ovvero peso proprio)] che equilibrano una distribuzione di tensioni che non viola in alcun punto il criterio di rottura del materiale, sono valori approssimati per difetto dei carichi di collasso o coincidenti con essi (Infatti, può esistere una più efficiente distribuzione di tensioni in equilibrio con carichi esterni più elevati).

Il secondo teorema della plasticità, detto teorema del limite superiore, afferma che i valori delle forze esterne (ovvero carichi esterni e forza peso) determinati attraverso l'eguaglianza tra il lavoro esterno compiuto in un qualsiasi meccanismo di rotture cinematicamente compatibile e l'energia dissipata all'interno della massa di terreno quando essa si deforma, sono valori approssimati per eccesso dei carichi di collasso o con questi coincidenti.

(Infatti, può esistere un più efficiente meccanismo che dà luogo a collasso con carichi esterni minori)

Questi due teoremi sono utilmente impiegati per la soluzione di alcuni problemi di plasticità di largo uso nelle applicazioni geotecniche.

Per semplicità, nei casi di seguito esaminati ci si riferirà a stati piani di deformazione in un mezzo terzico-plastico.

$$L_e = \text{lavoro esterno} = \sum \delta w \cdot F + \int_A \delta w \cdot p \, dA + \int_V \delta w \cdot \gamma \, dV$$

in cui

F sono forze al contorno, p sono pressioni totali al contorno applicate su aree A , γ è il peso all'unità di volume di un volume V di terreno e δw sono opportuni incrementi di spostamenti.

Stabilità di uno scavo a parete verticale in un mezzo puramente coesivo (1)

Con riferimento alla fig. 8.29, il problema è quello di determinare il valore dell'altezza di scavo, h_p , che corrisponde al raggiungimento delle condizioni di plasticizzazione nel mezzo.

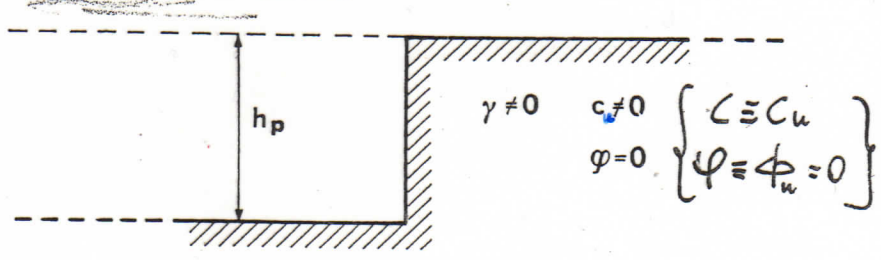


Fig. 8.29 - Schema geometrico dello scavo.

Per giungere ad una soluzione di tipo statico si consideri lo stato di tensione di un generico elementino A sul fronte di scavo (fig. 8.30a). Se γ è il

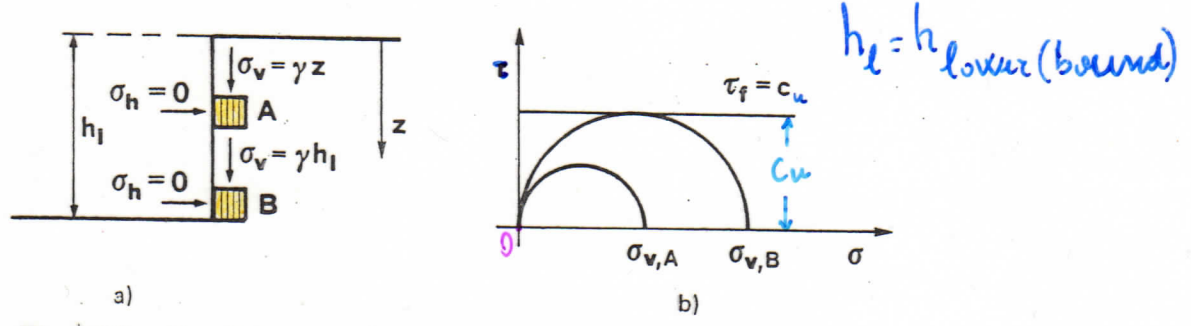


Fig. 8.30 - Condizioni di equilibrio di elementini sul fronte di scavo.

peso dell'unità di volume del materiale, tenendo conto che le direzioni verticale e orizzontale sono principali, la condizione di equilibrio comporta $\sigma_v = \gamma \cdot z$ e $\sigma_h = 0$. Il relativo cerchio di Mohr, riportato nella fig. 8.30b, mostra che tale stato di tensione è ancora distante dalle condizioni di rottura, rappresentate dalla retta $\tau_f = c_u$.

Se l'altezza di scavo raggiunge un valore opportuno, può accadere che per l'elementino B, al piede dello scavo, il corrispondente cerchio di Mohr sia tangente alla retta $\tau_f = c_u$ e che nel punto B sia stato raggiunto il collasso plastico. In queste condizioni risulta (fig. 8.30b)

$$\sigma_v = \gamma h_e = 2c_u$$

e, quindi,

$$h_e = \frac{2c_u}{\gamma} \tag{8.65}$$

La relazione (8.65) è stata ottenuta nel rispetto delle condizioni di equilibrio e del criterio di resistenza e rappresenta pertanto una soluzione di tipo statico del problema assegnato.

La stabilità dello scavo può essere analizzata anche con un approccio di tipo cinematico, fissando un meccanismo di scorrimento come quello ad esempio indicato nella fig. 8.31. Si procede imponendo che sia soddisfatta la condizione

$$L_e + L_i = 0$$

(1) da: Burghignoni A. (1985) : Lezioni di meccanica delle terre Roma : E.S.A.

$h_u = h_{upper} (bound)$

dove L_e è il lavoro compiuto dalle forze esterne ed L_i quello compiuto dalle forze interne.

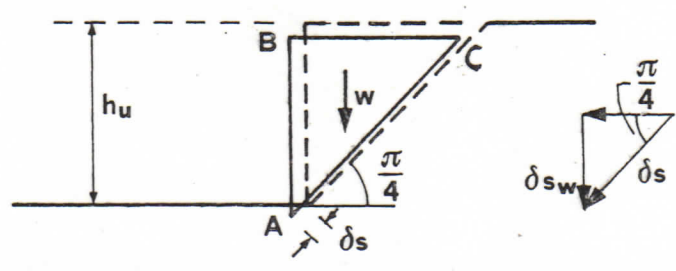


Fig. 8.31 – Possibile cinematiso di scorrimento per il problema dello scavo in mezzo plastico.

Supponendo che il cuneo ABC scorra rigidamente lungo il piano AC, il lavoro delle forze esterne, in questo caso costituite dal solo peso proprio W del cuneo, vale

$$L_e = W \delta s_w = W \sin \frac{\pi}{4} \delta s$$

dove δs_w e δs sono rispettivamente gli spostamenti virtuali in direzione della forza peso e lungo il piano di scorrimento (fig. 8.31).

Il lavoro delle forze interne si ricava considerando la risultante delle tensioni tangenziali a rottura lungo il piano di scorrimento. Risulta:

$$L_i = -\tau_f \overline{AC} \delta s = -c_u \frac{h_u}{\sin \frac{\pi}{4}} \delta s.$$

$$\begin{cases} c \equiv c_u \equiv \tau_f \\ \phi_u = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza

$$L_e + L_i = W \sin \frac{\pi}{4} \delta s - c_u \frac{h_u}{\sin \frac{\pi}{4}} \delta s = 0$$

e, tenuto conto che $W = \frac{1}{2} \gamma h_u^2$, dalla precedente uguaglianza si ottiene

$$h_u = \frac{4c_u}{\gamma} \tag{8.66}$$

Dal confronto tra la (8.65) si ricava

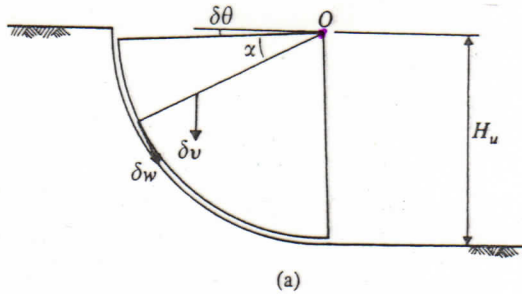
$$\frac{2c_u}{\gamma} = h_l \leq h_p \leq h_u = \frac{4c_u}{\gamma}$$

così come deve risultare in base ai teoremi di estremo.

Naturalmente, oltre a quelle appena ricavate, è possibile ottenere altre soluzioni sia di tipo statico che cinematico e l'analisi può essere spinta, almeno a livello concettuale, fino a ridurre al massimo lo scarto tra le due e ad avvicinarsi quindi alla soluzione vera.

(i) Another mechanism of plastic collapse consisting of a circular arc is shown in Fig 5.6. The sliding block is rigid and displaces by rotation about O at the top of the cut face, and we consider an increment of rotation $\delta\theta$. The length of the slip plane L and the increment of relative displacement across the slip plane δw are given by

$$L = \frac{1}{2}\pi H_u \quad \delta w = H_u \delta\theta \quad (5.19)$$



$H_u = H_{upper}(bound) \equiv h_u$

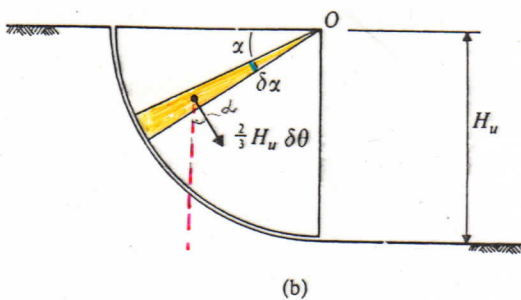


Figure 5.6 Mechanism of plastic collapse for a vertical cut slope for undrained loading.

where H_u is an upper bound for the height at which the cut face collapses. Hence, the increment of work done by the internal stresses is given by

$$\delta W = \sum c_u L \delta w = \frac{1}{2}\pi H_u^2 c_u \delta\theta \quad (5.20)$$

The only external forces are those due to the self weight of the sliding block. For a small sector as shown in Fig. 5.6(b) the volume is

$$dV = \frac{1}{2}H_u^2 \delta\alpha \quad (5.21)$$

and its weight acts at a radial distance $\frac{2}{3}H_u$ from the centre of rotation. The vertical component of displacement of the centre of mass of the sector is

$$\delta v = \frac{2}{3}H_u \delta\theta \cos\alpha \quad (5.22)$$

Hence, from Eq. (5.4), the increment of work done by the external loads is

$$\delta E = \int_V \delta v \cdot \gamma dV = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3}H_u \delta\theta \cos\alpha \gamma \frac{1}{2}H_u^2 d\alpha \quad (5.23)$$

and

$$\delta E = \frac{1}{3}\gamma H_u^3 \delta\theta \quad (5.24)$$

Thus, equating $\delta W = \delta E$, an upper bound for the height of the cut slope at collapse is given by

$$H_u = \frac{3\pi c_u}{2\gamma} = \frac{4.71c_u}{\gamma} = h_u \quad (5.25)$$

The value of H_u given by Eq. (5.25) is greater than that given by Eq. (5.13) and so we have not improved our estimate of collapse and the mechanism shown in Fig. 5.6 is better than that shown in Fig. 5.5.

give: $H_u = \frac{4c_u}{\gamma}$

(i) $\delta\alpha$: A.K.Kinoshita, 1981

Come già visto, per il limite inferiore h_L si è ottenuto:

$$h_L = \frac{2c_u}{\gamma}$$

Valori più alti di h_L , ottenuti sulla base di campi di tensione più complessi, sono presenti in letteratura:

$$h_L = \frac{2.82 c_u}{\gamma} \quad (\text{De Josselin de Jong, 1965; Hayman, 1973})$$

$$h_L = \frac{3.39 c_u}{\gamma} \quad (\text{De Josselin de Jong, 1977})$$

$$h_L = \frac{3.64 c_u}{\gamma} \quad (\text{Pastor, 1978})$$

Tutti questi sono valori corretti di limite inferiore h_L . Un valore più alto del limite inferiore di Pastor non è stato ancora ottenuto.

In relazione al limite superiore h_u , nelle pagine precedenti si sono esaminati due semplici meccanismi di collasso plastico, per i quali:

$$h_u = \frac{4c_u}{\gamma} \quad \text{e} \quad h_u = \frac{4.71c_u}{\gamma}$$

Usando meccanismi di collasso circolari, Fellenius nel 1927 ha trovato un più basso limite superiore. Il suo valore è:

$$h_u = \frac{3.83c_u}{\gamma}$$

Ci sono stati molti altri tentativi di trovare un valore ^{ancora} più basso, ma senza successo.

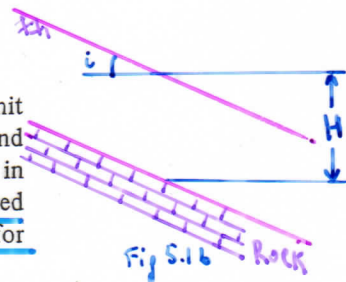
Si può concludere, pertanto, che l'altezza critica h_p di uno scavo verticale o di un pendio in materiali ^{puramente} coesivi ~~senza attrito~~ ($c_u \neq 0, \phi_u = 0$) è data da:

$$\frac{3.64 c_u}{\gamma} \leq h_p \leq \frac{3.83 c_u}{\gamma}$$

Come si vede, il campo di rottura è compreso in un ambito ristretto.

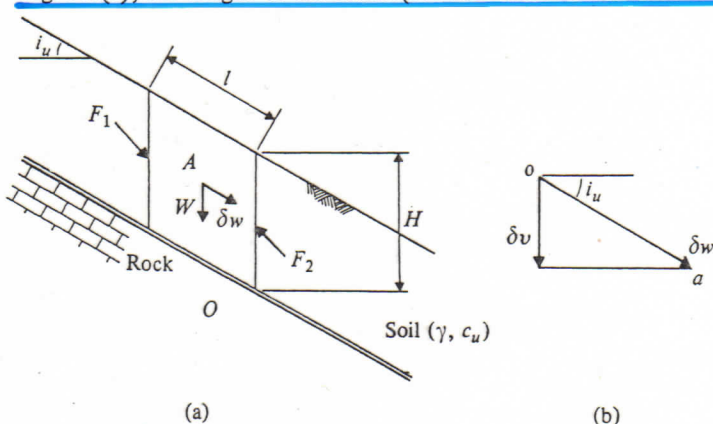
PENBIO INDEFINITO

The case for an infinitely long slope is shown in Fig. 5.1(b). In order to limit the depth of slipping soil, strong rock occurs at a depth H below ground level and this is a common occurrence where a relatively thin mantle of soil overlies rock in a hillside. In an infinitely long slope, the length down the slope is large compared with the depth H and it is required to calculate the limiting slope angle i_c for which collapse occurs.



1. Upper bound for an infinite slope

Figure 5.8(a) shows a mechanism of plastic collapse consisting of a slip plane through the soil at the rock level and, for convenience, we consider a block of soil length l measured down the slope. The corresponding displacement diagram for an increment of displacement δw is shown in Fig. 5.8(b). For an infinitely long slope, the forces on any such block are the same as those on any other similar block and so the forces F_1 and F_2 are equal and opposite. From the geometry of Fig. 5.8(a), the weight of the block (for unit thickness normal to the page) is



$\tau_f = c_u, \phi_u = 0$
 $i_u = i_{upper} \text{ (bound)}$

Figure 5.8 Mechanism of plastic collapse for an infinitely long slope for undrained failure.

$W = \gamma H l \cos i_u$ (5.28)

and from Fig. 5.8(b) the vertical component of displacement is

$\delta v = \delta w \sin i_u$ (5.29)

where i_u is an upper bound for the limiting slope angle. Hence,

noting that the increments of work done by the equal and opposite forces F_1 and F_2 sum to zero, we have

$\delta W = c_u l \delta w = \text{incremento di lavoro compiuto dalle tensioni interne}$ (5.30)

$\delta E = \gamma H l \cos i_u \delta w \sin i_u = \text{incremento di lavoro compiuto dalle forze esterne}$ (5.31)

and, equating $\delta W = \delta E$, an upper bound for the critical slope angle is given by

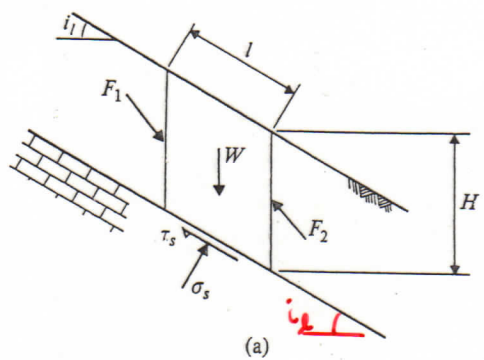
$\sin i_u \cos i_u = \frac{c_u}{\gamma H}$ (5.32)

or

$i_u = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2c_u}{\gamma H}$ (5.33)

2. Lower bound for an infinite slope

Figure 5.9(a) shows an infinite slope whose angle i_l is a lower bound for the limiting angle. The state of stress in the soil increases linearly with depth from zero at the surface and the maximum shear stresses $\tau = c_u$ occur on planes parallel with the slope. For an infinite slope, as before, the forces F_1 and F_2 are equal and opposite and the weight of a block of soil of length l is $W = \gamma H l \cos i_l$. Hence, resolving normal to and along the slope, we have



$$\begin{cases} \sigma = \gamma z \cos^2 i_e \\ \tau = \gamma z \sin i_e \cdot \cos i_e \end{cases}$$

$i_e = i_{\text{lower bound}}$

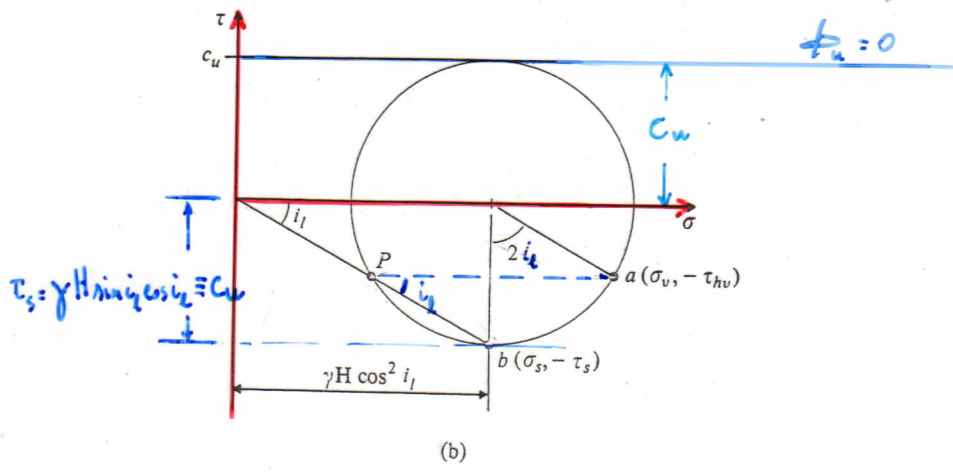


Figure 5.9 Equilibrium state of stress for an infinite slope for undrained loading.

$$\sigma_s = \gamma H \cos^2 i_l \quad \tau_s = \gamma H \sin i_l \cos i_l \quad (5.34)$$

where σ_s and τ_s are the normal and shear stresses in the soil on the plane parallel to the slope at a depth H . The Mohr's circle of total stress for an element of soil just above the rock is shown in Fig. 5.9(b). The pole is at P and points a and b represent the states of stress on a horizontal plane and on a plane parallel with the slope, respectively, and the angle subtended at the centre of the circle is $2i_l$. The Mohr's circle just touches the undrained failure envelope and so the state of stress in the slope does not exceed the undrained failure criterion given by Eq. (5.1). From the geometry of Fig. 5.9(b), making use of Eq. (5.34), a lower bound for the critical slope angle is given by

$$\tau_f = c_u \quad (5.1)$$

$$\tan i_l = \frac{\tau_s}{\sigma_s} = \frac{c_u}{\gamma H \cos^2 i_l} \quad (5.35)$$

and hence

$$i_l = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2c_u}{\gamma H} \quad (5.36)$$

Comparing Eqs (5.33) and (5.36) we find that the upper bound solution exactly equals the lower bound solution and so both must equal the exact solution. Hence the limiting slope angle i_c for undrained loading of an infinite slope is given by

$$i_c = \frac{1}{2} \sin^{-1} \frac{2c_u}{\gamma H} \quad (5.37)$$

There is of course no point in seeking to find better bounds.

We have been fortunate to obtain such good bound solutions and normally, as was the case for the vertical cut, we will only be able to find upper and lower bounds which differ from one another. Even though the upper and lower bounds may differ, one or other may correspond to the exact solution but we will have no means of knowing which, if either, bound is exact. Because the upper and lower bounds given by Eq. (5.37) are equal, the mechanism of plastic collapse shown in Fig. 5.8(a) must correspond to the state of stress shown in Fig. 5.9(a). This correspondence of the displacements and stresses leads to the slip line method of analysis, which we will discuss in Chapter 7.

Spinta su una parete rigida verticale (col teorema del limite inferiore)

Un altro problema di notevole interesse applicativo riguarda la determinazione della spinta su una parete rigida verticale a contatto con un mezzo plastico (fig. 8.32).

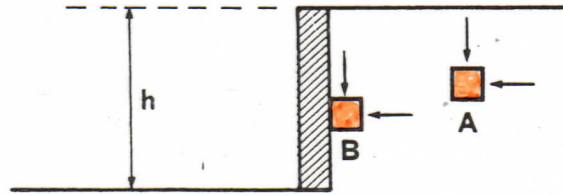


Fig. 8.32 - Schema del problema.

Si supponga che, nella sua posizione iniziale, la parete non alteri la distribuzione delle tensioni che si avrebbero nel semispazio in sua assenza, cioè che lo stato tensionale in un qualunque elementino A non sia influenzato dall presenza della parete stessa. Questa, pertanto, manifesta lo stesso comportamento che avrebbe il volume mancante per ricostruire il semispazio.

In queste condizioni, lo stato tensionale iniziale del generico elementino B, a contatto con la parete, è riportato sul piano di Mohr in fig. 8.33. Le tensioni principali coincidono con quelle verticali ed orizzontali poiché, per le ipotesi fatte, non possono esserci tensioni tangenziali sulla superficie di contatto tra il mezzo e la parete. Nelle condizioni iniziali, la distribuzione delle

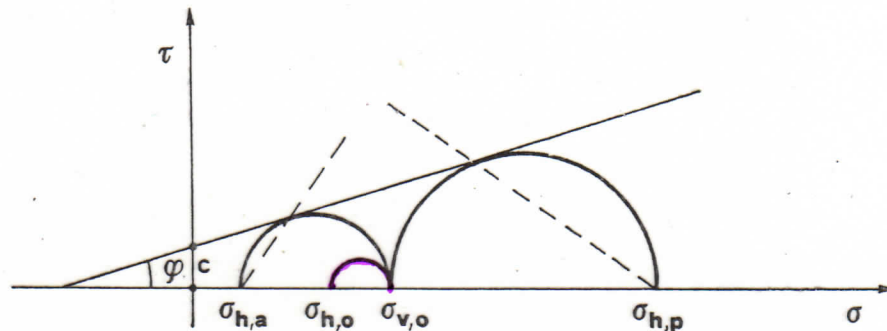


Fig. 8.33 - Possibili stati di tensione per un elementino a contatto con la parete.

tensioni orizzontali lungo la parete è facilmente ricavabile tramite la relazione (1)

$$\sigma_{h,o} = K_o \sigma_{v,o} \quad (8.67)$$

Le condizioni di plasticizzazione a tergo della parete possono essere ottenute immaginando un suo spostamento in direzione orizzontale, verso sinistra, riferendosi alla fig. 8.32, o verso destra (2).

Nel primo caso si produce una diminuzione della tensione orizzontale sull'elementino B, mantenendosi inalterata, per l'equilibrio, quella verticale. La tensione orizzontale raggiunge il valore minimo quando il corrispondente cerchio di Mohr risulta tangente alla retta critica (fig. 8.33). In questo caso tale tensione prende il nome di tensione orizzontale in condizioni di equilibrio limite attivo. *Il suo valore si ricava nel caso di geotecnica, ovvero:*

- (1) Si ricorda che questa relazione, se riferita specificamente alle terre, è definita in termini di tensioni efficaci. |||
- (2) L'insieme delle ipotesi sul comportamento della parete costituisce il presupposto della fondamentale teoria della spinta delle terre di Rankine (1857).

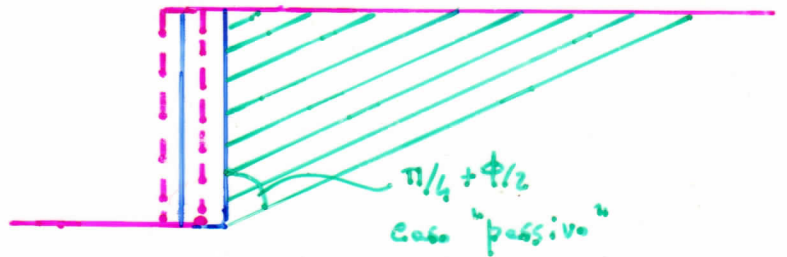
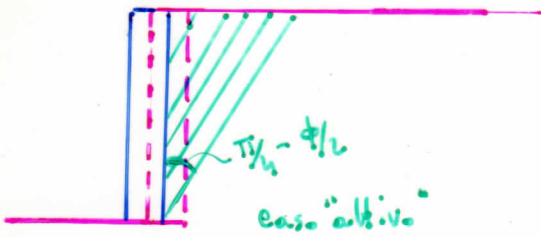
Nel secondo caso la tensione orizzontale aumenta rispetto a quella iniziale e si raggiungono le condizioni di equilibrio limite passivo.
Risulta cioè:

$$\sigma_{hp} = 2c\sqrt{K_p} + K_p\sigma_v \quad (e)$$

con

$$K_p = \frac{1}{K_a} = \frac{1 + \sin\phi}{1 - \sin\phi} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Il raggiungimento delle condizioni di equilibrio limite attivo o passivo comporta la formazione di un campo di linee di scorrimento rettilinee inclinate di $(\pi/4 - \phi/2)$ nel primo caso e di $(\pi/4 + \phi/2)$ nel secondo rispetto alla parete



0, più semplicemente ed in entrambi i casi, di $(\pi/4 + \phi/2)$ rispetto al piano principale maggiore.⁽¹⁾

In definitiva, seguendo la teoria di Rankine, assumendo cioè un approccio di tipo statico, si perviene alla soluzione del problema integrando le (d) ed (e) lungo la parete:

$$S_a = \int_0^h \sigma_{ha} dz \quad = \text{spinta attiva}$$

$$S_p = \int_0^h \sigma_{hp} dz \quad = \text{spinta passiva}$$

⁽¹⁾ È ovvio che ϕ, c, σ debbano intendersi in termini effettivi. Anche in quel che segue.

Le spinte sulla parete possono essere ricavate anche utilizzando soluzioni di tipo cinematico (o di limiti superiori). (1)

Ci si riferisca alla fig. 8.35 nella quale è indicato il movimento della parete e lo scorrimento lungo una superficie piana di un retrostante cuneo rigido di materiale. Lo schema in figura si riferisce ad uno stato attivo; considerazio-

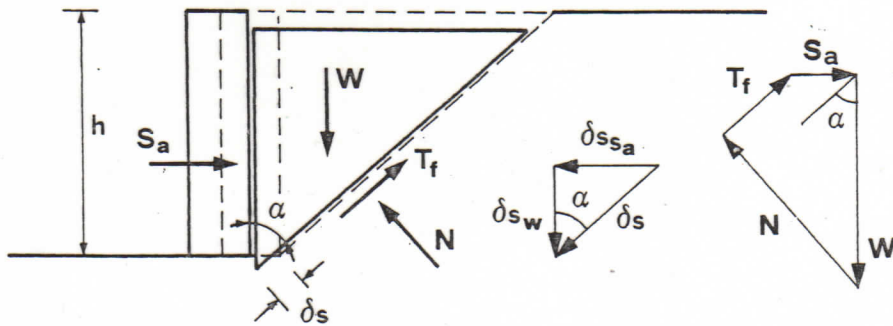


Fig. 8.35 - Schema geometrico per la determinazione della spinta attiva con il metodo cinematico.

ni del tutto simili si possono fare per uno stato passivo.

Il lavoro delle forze esterne è dato da

$$L_e = W \delta s_w - S_a \delta s_{S_a}$$

mentre quello delle forze interne è

$$L_i = - T_f \delta s$$

dove, per la geometria del problema,

$$W = \frac{1}{2} \gamma h^2 \tan \alpha$$

e, per il criterio di Mohr-Coulomb ($\tau_f = c + \sigma_n \cdot \tan \phi$),

$$T_f = \tau_f \frac{h}{\cos \alpha} = \frac{ch}{\cos \alpha} + \frac{\sigma_n h}{\cos \alpha} \tan \phi = \frac{ch}{\cos \alpha} + N \tan \phi. \quad (8.74)$$

Il valore della forza normale N nella (8.74) può essere ricavato in base alla condizione di equilibrio riportata graficamente nella fig. 8.35. Proiettando i vettori che rappresentano Sa e W nella direzione parallela a Tf si ottiene

$$N = W \sin \alpha + S_a \cos \alpha.$$

Pertanto, la condizione $L_e + L_i = 0$ si traduce nella relazione

$$W \delta s_w - S_a \delta s_{S_a} - \left[\frac{ch}{\cos \alpha} + (W \sin \alpha + S_a \cos \alpha) \tan \phi \right] \delta s = 0. \quad (8.75)$$

Tenendo conto che $\delta s_w = \delta s \cos \alpha$ e che $\delta s_{S_a} = \delta s \sin \alpha$, dalla (8.75) si ricava:

$$S_a = \frac{-ch + \frac{1}{2} \gamma h^2 \sin \alpha (\cos \alpha - \tan \phi \sin \alpha)}{\cos \alpha (\sin \alpha + \tan \phi \cos \alpha)}. \quad (8.76)$$

(1) Lo sviluppo di questo approccio costituisce parte della teoria della spinta delle terre di Coulomb (1773). Che viene ora interpretata come una soluzione di plasticità di limiti superiori, sebbene l'analisi sia basata sull'equilibrio delle forze e non sul bilancio lavoro - energia.

Il valore dell'inclinazione α della superficie di scorrimento che rende massima la spinta attiva si ricava imponendo la condizione

$$\frac{\partial S_a}{\partial \alpha} = 0 .$$

Svolgendo la derivata, tale condizione comporta l'uguaglianza

$$\tan^{-1} (2\alpha) = \tan \varphi$$

cioè

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} .$$

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

Sostituendo questo valore di α nella (8.76) si ottiene l'espressione cercata della spinta attiva:

$$\begin{aligned} S_a &= -2c h \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} + \frac{1}{2} \gamma h^2 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \\ &= -2c h \sqrt{K_a} + \frac{1}{2} \gamma h^2 K_a . \end{aligned} \quad (8.77)$$

Come si vede, questo risultato coincide con quello ottenuto per via statica. Le ipotesi fatte nei due casi per le condizioni al contorno sono infatti identiche e l'energia dissipata nello scorrimento, per il particolare cinematisma ipotizzato, coincide con quella dissipata in una deformazione plastica uniforme del cuneo.